

baumit II

SPIEL & MATHEMATIK

Gerhard Stettler

Kursunterlagen Pustertal 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
handeln und denken	5
Handeln und denken sind untrennbar	5
Handeln und denken initiieren	6
Handeln und denken dokumentieren	8
entdecken (Realitäten)	9
Den Raum parkettieren (füllen)	9
Den Würfel kippen	10
Den Somawürfel gekippt bauen	10
erfinden (Invention)	12
Ein Würfelpuzzle erfinden	12
Mit Prismen bauen	14
entwickeln (Konventionen)	19
Volumen ist Grundfläche mal Höhe	19
Wenn «Grundfläche mal Höhe» nicht mehr gilt	21
Netze, Flächen, Kanten	22
Neues zumuten	23
Eine Hirnhälfte ist spezialisiert für Neues	23
Dank	24
Literatur	25
Anhang	26

Impressum

Autor: Gerhard Stettler (gerhardstettler@gmail.com)

Copyright: beim Autor

Bilder: Gerhard Stettler, wenn nicht anders vermerkt. Die Aufnahmen der geometrischen Körper entstanden während des Unterrichts.

Zitiervorschlag: Stettler, G. (2016): **baumit II**. Spiel & Mathematik. Kursunterlagen Pustertal. Langnau.

«Ein mathematischer Gegenstand ist,
was er tut.»

Timothy Gowers (*1963) engl. Mathematiker

Einleitung

Als 2013 für die Lehrerweiterbildung im Pustertal (Südtirol) **baumit I** entstand, entschied ich mich rechtwinklige Bauklötze als Unterrichtsmaterialien herzustellen. Mir war bewusst, dass das Entwickeln schräger und runder Körper für den Mathematikunterricht folgen muss, sollten diese Materialien den heutigen Bildungsstandards (www.kmk.org, Stand 13.03.2016; Walther et al., 2011) für die Grundschule genügen. Jetzt liegt **baumit II** vor, ein Set mit schrägen geometrischen Körpern.

Die Motivation zur Herstellung dieser Bauklötze ist die didaktische Haltung gemäss «Mathematik zum Anfassen» (www.mathematikum.de, Stand: 19. Januar 2016). Ich habe schon mehrmals im Mathematikum fasziniert den Kindern und Erwachsenen bei ihrem Tun zugehört. Dabei war jedes Mal offensichtlich: Handeln, denken und das Bedürfnis zur Kommunikation sind eng miteinander verknüpft.

Mit der Beschränkung auf rechtwinklige Körper bin ich 2013 möglichen Schwierigkeiten bei der Produktion schräger geometrischer Körper ausgewichen. Ich konnte in der Broschüre zu **baumit I** alle Lehrpersonen ermutigen, die Bauklötze in der Schulwerkstatt für den eigenen Unterricht selber herzustellen (Stettler, 2013). Damit spart man Geld und stellt sicher, dass nur Materialien produziert werden, die auch Verwendung finden. Das Produzieren schräger Körper ist anspruchsvoller. An einzelnen Beispielen werde ich aufzeigen, wie spezielle Einrichtungen (Lehren) genutzt werden können, um **baumit II** speditiv produzieren zu können. Auf diesen Aspekt näher einzugehen ist mir wichtig. Es ist eine zentrale Kompetenz von Handwerkern, die geometrischen Möglichkeiten einer Maschine durch Lehren produktbezogen zu erweitern. Der Bau dieser Einrichtungen zeugt oft von Phantasie, grossem Vorstellungsvermögen und reicher Erfahrung. Diese handwerkliche Praxis ist nur möglich, wenn beim Planen das Wissen über die Maschinen verbunden werden kann mit dem Wissen über die Eigenschaften des Werkstücks. In unserem Fall sind es die schrägen Körper. Das (planerische) Denken und das Handeln sind ein Ganzes. Ich hoffe, dass diese Hinweise Lehrkräfte ermuntern auch Bausteine von **baumit II** selber zu produzieren oder sogar neue, schräge Formen selber zu kreieren.

Die geometrischen Körper von **baumit II** werden immer nach dem gleichen Verfahren produziert: Von einem Holzstab mit entsprechendem Querschnitt werden durch gewählte Schnitte die Körper abgetrennt. Dieses Prinzip hat in der Reifendreherei des Erzgebirges eine lange Tradition (www.reifendreherei.de, Stand: 9. Januar 2016). Leider können mit diesem Verfahren nicht alle eckigen, geometrischen Körper, die man sich denken kann, hergestellt werden.

baumit II umfasst einige der besprochenen Körper zur Anschauung. Um Bauverfahren zu machen, braucht es eine grössere Anzahl der vorgestellten Körper. Mit einem geometrischen Körper in der Hand können wir raumgeometrische Eigenschaften vielfältig wahrnehmen und als Erfahrung im Gedächtnis für lange Zeit festigen. Der Körper in der Hand lässt das Denken über mathematische Zusammenhänge weiter schweifen; es reisst nicht ab.

Form und Masse der schrägen Körper sind so gewählt, dass Beziehungen zu den rechtwinkligen Formen von **baumit I** möglich sind. Dadurch können Kanten, Oberflächen, Volumina verglichen werden, um daraus mathematische Schlüsse ziehen zu können.

baumit II ist so zusammengestellt, dass mit den Körpern Mathematik entdeckt, erfunden und entwickelt werden kann. Unter Entdecken verstehe ich eine Realitätsannäherung und das Erkennen von Mustern. Diese Lernsituation unterscheidet sich vom Erfinden. Beim Erfinden, entsteht etwas Neues (Invention). Dies ist der Fall, wenn Kinder und Jugendliche für die andern der Klasse Aufgaben ausdenken, ein neues Puzzle kreieren oder sich neuen Bauaufgaben stellen. Entwickeln findet in Lernsituationen statt, in denen sich Kinder und Jugendliche mathematische Konventionen aneignen. Ein Gleichgewicht zwischen Konvention und Invention ist für das mathematische Lernen bedeutsam (Wollring, 2007). Dieses Gleichgewicht im Mathematikunterricht immer wieder herzustellen, ist eine hohe Kunst.

baumit II ist ein stufenübergreifendes Unterrichtsmittel. Es ist nicht die Absicht, die vorgeschlagenen Themen im beschriebenen Umfang mit allen Schulklassen durchzuführen. Jede Lehrkraft soll das auswählen, was sie für die Lernsituation der Kinder und Jugendlichen als geeignet erachtet. Es ist mir wichtig zu zeigen, dass sich mathematische Themen auch für grössere Projekte eignen. Zur Bearbeitung des Kompetenzbereichs «Raum und Form» bieten sich die geometrischen Körper geradezu an.

Bei jedem Thema ist angegeben, welches Material in **baumit II** dafür vorgesehen ist. Die Materialien sind thematisch geordnet und in Kartonschachteln verpackt.

Die Namen der in den Praxisbeispielen erwähnten Kinder und Jugendlichen wurden zum Schutz der Persönlichkeit geändert.

«Jedes Denken wird dadurch gefördert,
dass es in einem bestimmten Augenblick sich
nicht mehr mit Erdachtem abgeben darf,
sondern durch die Wirklichkeit hindurch muss.»

Albert Einstein (1879 – 1955) Physiker

handeln und denken

Handeln und denken zieht sich wie ein roter Faden durch mathematische Auseinandersetzungen. Als Grundlage eines Mathematikunterrichts rund um schräge geometrische Körper soll diesem Aspekt im vorliegenden Kapitel besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden.

Handeln und denken sind untrennbar

Bauklötze laden zum Spielen ein. Wenn Kleinkinder bauen, erobern sie den Raum. Sie drängen hinaus in die Ebene und hinauf gen Himmel. Architekten und Designer entwickeln ihre Ideen oft an Modellen. Diese werden gezeigt, wenn Absichten und Entschiede kommuniziert werden. Sowohl Kleinkinder als auch Berufsleute suchen, finden, vergleichen und optimieren handelnd. Beide unterscheiden nicht zwischen handeln und denken. Die Frage ist berechtigt, warum wir Pädagogen diese Unterscheidung im Schulunterricht machen und warum wir dazu neigen, auch im Mathematikunterricht das Denken höher zu gewichten als das Handeln. Der amerikanische Neurologe Frank R. Wilson (2002) meint: «Auch hält die alte Trennung von Körper und Geist einer näheren Prüfung nicht stand, wenn wir die höchst komplexen Formen kulturell bedingten Verhaltens betrachten [...]. Die unmissverständliche Botschaft der Biologie an die Pädagogen lautet: Die beste Technik zur Förderung menschlicher Intelligenz ist die Vereinigung (nicht Teilung) von Körper und Geist.»

Mathematik ist die Wissenschaft der Muster. Wenn Kinder und Jugendliche im Mathematikunterricht nach bestimmten Mustern bauen, erfahren sie deren Wirkung. Sie betreiben Raumgeometrie. Dabei ist zu bedenken, dass auch das Pflegen des Gegenteils Wirkung hat; Objekte bauen, die kein Muster erkennen lassen. Zum Verstehen der Mathematik finde ich es wichtig, Kinder und Jugendliche immer wieder aufmerksam zu machen, auf Dinge, die nicht mit Mathematik beschrieben werden können. Oder kennen Sie beispielsweise eine allgemein gültige Formel zum Berechnen des Volumens einer Kartoffel?

baumit II soll mithelfen, Mathematik sicht- und greifbar zu machen. Kindern und Jugendlichen wird mit diesem Material die Möglichkeit gegeben Mathematik in die Hand zu nehmen und handelnd weiter zu entwickeln. Beim Eintritt in die Grundschule bringen Kinder einen vielfältigen Handlungserfahrungsschatz mit: Viele Aspekte der Mathematik wie drehen, schieben, vorne, hinten, Volumen (leeren, füllen, umschütten) usw. haben Kinder in Handlungen erfahren und im motorischen Gedächtnis gespeichert. Zum Zeitpunkt des Schuleintritts hat das Kind längst gelernt seine Handlungen soweit zu optimieren, damit etwas gelingen kann. Auf diesem Lernweg ist das Kind oft gescheitert, hat die Sache neu angepackt und so herausgefunden, wie es sein Ziel erreichen kann. Handeln und Denken sind bei diesem Prozess eng miteinander verknüpft. Diese Verbindung soll beim Mathematiklernen mit geeignetem Material gefördert und gestärkt werden. Auch aus neurobiologischer Sicht gibt es keinen

Grund, im Unterricht das Denken vom Handeln zu trennen. Zu einem Gegenstand, den wir in den Händen halten oder der in unseren Händen entsteht, können wir eine Beziehung aufbauen. Der deutsche Mathematikdidaktiker Bernd Wollring (2007) sagt dazu: „Der Werksinn der bearbeiteten Gegenstände ist ein Element, das insbesondere im Elementarbereich und in der Grundschule einzufordern ist. Natürlich gibt es im Mathematikunterricht wie in allen anderen Unterrichten zu bestimmten Fächern auch Elemente, die ein spezifisches Trainieren bis zur Geläufigkeit erfordern. Aber die Beziehung von Lernenden zum bearbeiteten Gegenstand baut sich im Wesentlichen über den Werksinn auf, d.h. über seine oder ihre spezifischen Wertschätzung oder Bedeutungsschätzung des Gegenstandes über die Mathematik hinaus, sei es durch eine Einschätzung der Nutzbarkeit oder sei es durch eine Einschätzung von Schönheit oder Attraktivität. Der Werksinn ist wesentlich bestimmend dafür, dass positive Bildungserlebnisse als lange haltbare Grundbausteine zum Aufbau eines Wissensnetzes zu gewinnen.«

Wenn Kinder oder Jugendliche über Gegenstände einen Zugang zum mathematischen Sinn gefunden haben, stellt sich im Schulalltag die Frage, wie sich dieser mathematische Fund nachhaltig festigen lässt. Ich schlage vor, dass Lernende bedeutsame Gegenstände behalten dürfen. Sie werden die Gegenstände mit nach Hause nehmen und mit ihnen in den Händen eine andere Mathematik beschreiben, als wenn sie mit leeren Händen zu erzählen versuchen.

Die Handlungskompetenz eines Kindes entwickelt sich nicht parallel mit seiner Sprachkompetenz. Beobachtungen zu mathematischem Handeln geben oft einen differenzierteren Einblick in die Denkwelt junger Menschen als ihre Darstellungen oder ihre sprachlichen Äusserungen vermuten lassen. Die Bedeutung des Handelns und Denkens als untrennbare Kompetenzen findet aktuell im Mathematikunterricht nicht den nötigen Niederschlag, um erfolgreiches und motivierendes Lernen sicherzustellen. Möglicherweise fehlen uns Pädagogen die Instrumente um das Handeln differenziert einschätzen und als Kompetenz beurteilen zu können.

Handeln und denken initiieren

Die Handlungserfahrungen aus dem Kleinkindes- und Kindesalter im Umgang mit rechtwinkligen Körpern sind reichhaltiger als jene mit schrägen. Es sind die rechtwinkligen Bausteine, mit welchen Kinder früh lernten, Gebäude zu bauen. Kinder bauen hohe Türme und lassen sie mit Begeisterung und von Schreken begleitet zusammenkrachen. Es ist möglich, dass jemandem Erfindungen mit rechtwinkligen Körpern gelingen, aber das Bauen mit schrägen Elementen grosse Schwierigkeiten bereitet. Dies ist bestimmt kein Hinweis auf mangelnde mathematische Fähigkeiten. Viel mehr ist es ein Hinweis, dass mathematisches Handeln und damit denken auch geprägt ist von Lebenserfahrungen. Die Lebensgeschichte kann das menschliche Wesen für Neues öffnen oder für Unbekanntes abstumpfen.

Damit möglichst alle Kinder und Jugendlichen fasziniert die Geometrie schräger Körper entdecken können, ist dem Zugang zu diesen Mustern besondere Beachtung zu schenken. Der Unterricht ist erfolgreicher, wenn als Ausgangspunkt bekannte rechtwinklige Körper angeboten werden, die auf verschiedene Arten in schräge Formen verwandelt werden können. Ich beschränke mich exemplarisch auf die Phänomene «Kippen» und «Teilen». Diese zwei Zugänge ermöglichen viele Erfahrungen mit schrägen Körpern.

Durch das Kippen eines Würfels zum Prisma (Thema II) werden die Veränderungen des Netzes (Abwicklung der Oberfläche) sichtbar. Das Herstellen und Spielen mit dem Somawürfel (Thema III) in gekippter Form eröffnet neue Handlungserfahrungen und erweitert dadurch das räumliche Vorstellungsvermögen.

Beim Teilen gilt den Schnittflächen besondere Beachtung. Sind die Schnittflächen nach dem Halbieren eines Würfels quadratisch oder rechteckig? Könnten sie sechseckig oder dreieckig sein? Oder wären eine Raute oder ein Parallelogramm möglich? Das Teilen eines rechtwinkligen Körpers kann zur Herausforderung werden. Will man z.B. einen Würfel so zersägen, dass ein regelmässiges Tetraeder übrig bleibt, ist bereits das Einspannen des Werkstücks eine Herausforderung. Die Schraubstöcke eignen sich für Körper, deren Seitenflächen parallel verlaufen.

Das Kippen eines Würfels und das Teilen des Würfels in diagonalen Richtung einer Seitenfläche haben als Ergebnis zwei verschiedene Prismen. Beide eignen sich zum Erfinden neuer Objekte. Damit entwickeln und bauen mit Prismen (Thema V und Thema VI) gelingt, können Kindern und Jugendlichen zwei Methoden vorgeschlagen werden:

- Mit Prismen werden Muster gesucht und mit Malerklebband diese Bausteine zusammengeklebt.
- Mit der Zauberschlange von Ernő Rubik (Rubik's Snake, 2016) werden zuerst Muster gesucht, die nachher mit den Bausteinen zusammengesetzt werden. Mit der Rubik's Snake werden die geometrischen Möglichkeiten beim Bauen mit Prismen eingeschränkt. Allerdings ist sie sehr wertvoll, um die Prozesse «Handeln und Denken» zu initiieren.

Die Kinder und Jugendlichen können selber entscheiden mit welcher Methode sie beginnen möchten.

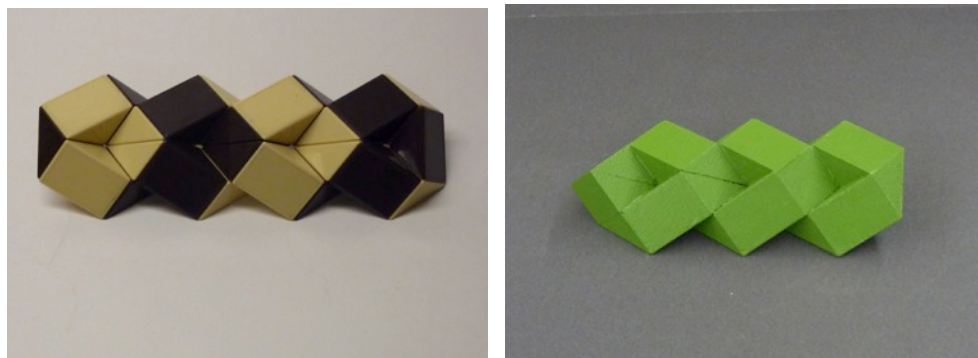


Abbildung 1: Beispiel aus der Werkstatt der Klinik Neuhaus, Bern (CH). Mit der Rubik's Snake entwickelte Idee (links), ausgeführt mit Holzprismen, grün lackiert (rechts).

Ebenfalls eine lehrreiche und spielerische Auseinandersetzung ist mit dem «MATHMAKER – DAS INNOVATIVE KONSTRUKTIONSSPIEL» (www.mathmaker.nl, Stand: 22. Februar 2016) möglich. Die trapezförmigen Prismen haben zwei quadratische Seitenflächen mit je vier Magneten. Damit kann ein Baustein mit einem anderen verbunden werden. Die Idee des Spiels zeigt dreierlei:

1. Lässt ein Baustein beim Zusammensetzen mehrere Varianten zu, ist vielfältigeres Bauen möglich.
2. Die Reduktion auf eine oder zwei Arten Bausteine wird beim Spielen zum Gewinn.
3. Erfinden findet in der Reduktion statt.

Die Schönheit kann animierend wirken, so dass die Kinder und Jugendlichen von ihren Modellen ein ausgewähltes Objekt vergrössert als Skulptur selber realisieren könnten.

Handeln und denken dokumentieren

Es ist eine Chance, Kinder und Jugendliche anzuhalten, den Prozess des Erfindens, Entdeckens oder Entwickelns zu dokumentieren. Im Rahmen der Dokumentation erfahren sie, welche Bedeutung Pläne, Skizzen oder notierte Stichworte haben. Sie lernen, dass es einerseits persönliche Dokumente gibt, die helfen einen Prozess nachvollziehen zu können oder zu einem späteren Zeitpunkt eine Arbeit fortzusetzen. Andererseits wird ihnen bewusst, dass manche Dokumente auch Dritte verstehen müssen (z.B. Spielanleitungen, Konstruktionspläne) (Stettler, 2013). Schräge Körper als Raumbild oder in Normalprojektion gezeichnet, sind teils verzerrt. Seitenlängen erscheinen verkürzt, Winkel verzerrt. Das macht nicht nur das Zeichnen, sondern auch das Interpretieren der Pläne schwieriger. Wenn Vorlagen (Rasterpapier Anhang) beim Dokumentieren keine Hilfe bieten, kann die Fotografie eine geeignete Methode sein (Abbildung 2): Im Hintergrund wird ein Karton aufgehängt, damit die Umgebung neutral ist und nichts ablenkt. Wird die Kamera auf ein Stativ montiert, können die Bilder immer gleich und von den Kindern und Jugendlichen selber erstellt werden.

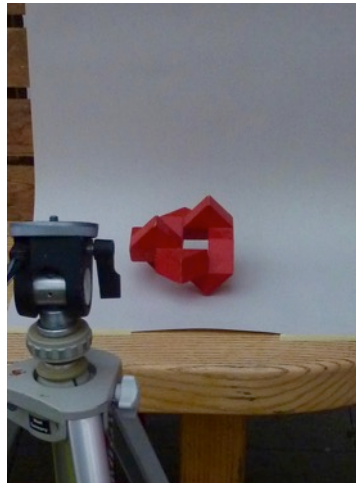


Abbildung 2: Ist das Zeichnen der schrägen Körper zu anspruchsvoll, kann die Dokumentation mit der Kamera eine wertvolle Variante darstellen.

«Man kann niemanden etwas lehren,
man kann ihm nur helfen,
es in sich selbst zu finden.»

Galileo Galilei (1564 – 1642) Mathematiker, Physiker, Astronom

entdecken (Realitäten)

Den Raum parkettieren (füllen)

Parkettieren ist ein Prinzip um Flächen nach einem Muster, mit oder ohne Wiederholungen (Penrose: https://de.wikipedia.org/wiki/Roger_Penrose, Stand 22. Februar 2016), zu decken. Alle kennen die Realisierung beim Parkettboden. Parkettieren als Prinzip wird hier auch in der Anwendung von Mustern in der dritte Dimension verwendet. Durch die Wiederholung der Muster werden Räume gefüllt. Wie sich dabei schräge Körper verhalten, erforschen wir im folgenden Kapitel.

Thema I

Ausgangslage sind die Erfahrung und Erkenntnis aus, dass mit der dritten Potenz einer Anzahl gleich grosser Würfel (>1) ein grösserer Würfel, also die gleiche Form, gebaut werden kann. Konkret heisst das, dass 8, 27, 64, 125 usw. gleich grosse Würfel zu einem grösseren Würfel zusammengesetzt werden können. Mit diesem Muster lässt sich der Raum lückenlos parkettieren.

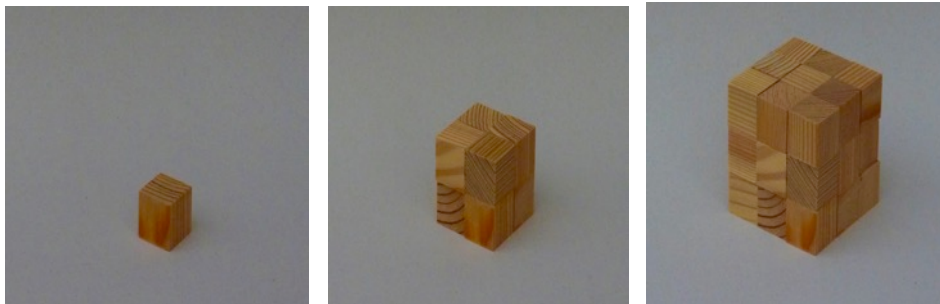


Abbildung 3: Die Erkenntnis, dass mit der dritten Potenz einer Anzahl gleich grosser Würfel (>1) ein grösserer Würfel, also die gleiche Form, gebaut werden kann, ist Voraussetzung fürs Raumfüllen.

Ist es analog zu den Würfeln möglich, mit gleichen schrägen Körpern den Raum lückenlos zu parkettieren? Versuche mit regelmässigen Tetraedern (gleichseitig dreieckige Seitenflächen) lassen erfahren, dass sich dieser Körper nicht eignet zur lückenlosen Raumfüllung. Wichtig ist, dass Schülerinnen und Schüler solche Handlungserfahrungen in ihrer Sprache begründen (siehe «Handeln und denken dokumentieren»). Die Versuche können mit den anderen Pyramiden aus **baumit II** fortgesetzt werden. Solche Versuche führen zu einer spannenden Erkenntnis: Die schiefen und geraden quadratischen Pyramiden lassen sich zu Würfeln zusammensetzen. Mit diesen Würfeln lässt sich wie oben beschrieben (Anzahl der Würfel in der dritten Potenz) der Raum füllen. Beim Füllen von Räumen mit diesen Pyramiden ist ein anderes Muster wirksam als beim Füllen mit Würfeln. Darum drängt sich die Frage auf: Gibt es Prismen oder Pyramiden, mit denen die gleiche Form in grösserer Dimension gebaut

werden kann, um damit analog zur Erfahrung mit den Würfeln einen Raum lückenlos zu füllen? Im Fall der Pyramiden ist diese Frage komplex. Bei den Prismen hingegen werden Kinder und Jugendliche bestimmt Lösungen finden und die festgestellten Gesetzmässigkeiten mit dem Parkettieren von Räumen mit Würfeln vergleichen können. Sie können die geeigneten Prismen beispielsweise mit Netzen aus Karton bauen und den Mitschülerinnen zur Diskussion vorstellen.

baumit II: 8 Stück dreieckige, gerade Prismen, $S = 50\text{mm}$; 20 Stück $S = 25\text{mm}$
8 Stück quadratische, schiefe Prismen $S = 50\text{mm}$; 20 Stück $S = 25\text{mm}$
6 Stück quadratische, gerade Pyramiden, $S = 100\text{mm}$
20 Stück Tetraeder, $S = 50\text{mm}$
Abfall: 6 Stück dreieckige, schiefe Pyramiden

Den Würfel kippen

Thema II

Wir stellen vor uns einen Kartonwürfel ($100\text{mm} \times 100\text{mm} \times 100\text{mm}$), bei dem Boden und Deckel mit dem Mantel nicht fest verbunden sind, auf den Tisch. Sanft kann der Würfel zu einem Prisma gekippt werden. Das zur Seite Drücken macht Veränderungen zwischen dem Würfel und seiner gekippten Form, dem Prisma, erlebbar. Wer neben dem Kartonwürfel ein Kartonprisma stehen hat, wird mathematische Grössen (Netz, Kanten, Volumen, Diagonalen, Winkel) bewusst vergleichen können. Auch in diesem Fall ist eine Dokumentation der Veränderungen lehrreich.

In Gedanken stellen wir uns den Kartonwürfel in einem rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystem vor. Das Kippen ist darin eine Veränderung in einer Achsenrichtung. Was verändert sich, wenn das Prisma nach diesem Kippen in eine zweite und dritte Achsenrichtung gekippt wird? Wie sehen die Körper aus, die entstehen?

baumit II: 1 Würfel, $S = 100\text{mm}$
1 quadratisches, schiefes Prisma, $S = 100\text{mm}$
6 Stück Kunststoffquadrate $S = 100\text{mm}$

Den Somawürfel gekippt bauen

Thema III

Wer im Mathematikunterricht Schülerinnen und Schüler anregt, einen Somawürfel aus 27 Würfelchen zu erfinden (Stettler, 2013), wird eine besondere Beobachtung machen können: Nach Versuchen des Zusammensetzens, des Bauens der Modelle, der Dokumentation des Prozesses und dem Zeichnen der Ideen auf Plänen, setzen die jungen Erfinder ihr Puzzle erstaunlich flink zusammen. Es ist nicht selten, dass es nach dieser intensiven Auseinandersetzung, den zahlreichen Wiederholungen – dem Üben – mit geschlossenen Augen gelingt. Ausgehend davon sollen die Erfinder eine neue Erfahrung machen. Sie bauen den eigenen Somawürfel in gekippter Form, als Prisma (siehe Thema II). Die Arbeit am eigenen Puzzle in Schräglage ist eine Herausforderung. Die Prismen liegen anders in der Hand als die Würfel. Es ist, als wäre eine neue Orientierung nötig, weil die gekippten Teile plötzlich ganz andere Eigenschaften haben. Und es scheint, als könnten die Erfahrungen mit den rechtwinkligen Bausteinen kaum genutzt werden.

baumit II: 30 Stück quadratische, schiefe Prismen, $S = 33.3\text{mm}$

Produktion der Prismen

Der Querschnitt der gehobelten Holzstäbe ist rechtwinklig. Mit dem Parallelanschlag der Kreissäge wird die Länge der Prismen bestimmt. Der Queranschlag ist so eingestellt, damit die Prismen einen Winkel von 60° haben. Mit dem Splitterholz am Queranschlag kann dafür gesorgt werden, dass beim Schneiden einwandfreie Körperkanten entstehen (Abbildung 4).

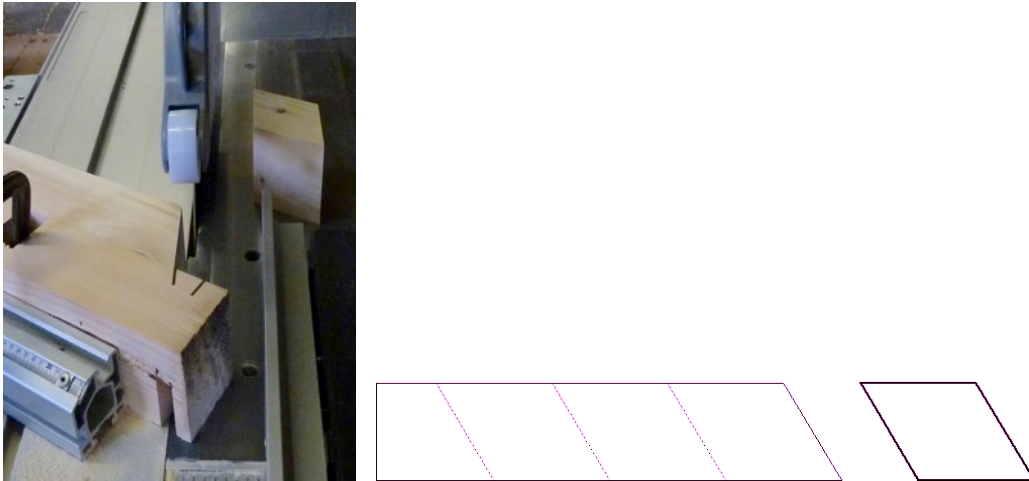


Abbildung 4: Das Schneiden der Prismen an der Kreissäge mit schräg gestelltem Queranschlag (links). Grundriss (rechts).

Der Querschnitt der Holzstäbe ist so gewählt, dass alle Kanten des abzuschneidenden Prismas gleich lang sind. Das genaue Berechnen der Masse ist eine Anwendung des Satzes von Pythagoras. (Abbildung 5) Schülerinnen und Schüler des 7. - 9. Schuljahres können dies selber berechnen.

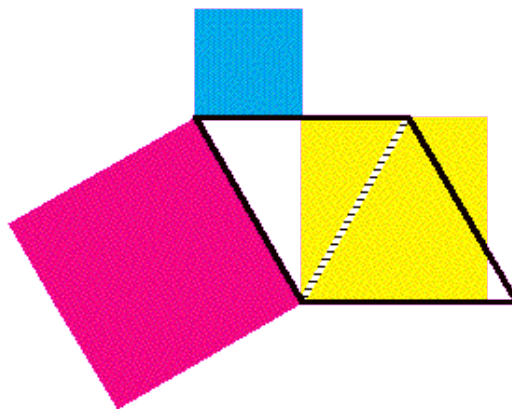


Abbildung 5: Der Holzquerschnitt lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen.

«Was ich nicht bauen kann,
kann ich nicht verstehen.»
Richard Feynman (1918 – 1988) Physiker

erfinden (Invention)

Ein Würfelpuzzle erfinden

Thema IV

Erfinder gehen von der Realität aus, sprengen Grenzen und schaffen Neues (Inventionen). Diese Erfahrung sollen Schülerinnen und Schüler beim Erfinden erleben können.

Mit 9 Winkeln aus je 3 Würfeln kann ein Würfelpuzzle zusammengesetzt werden (Abbildung 6).

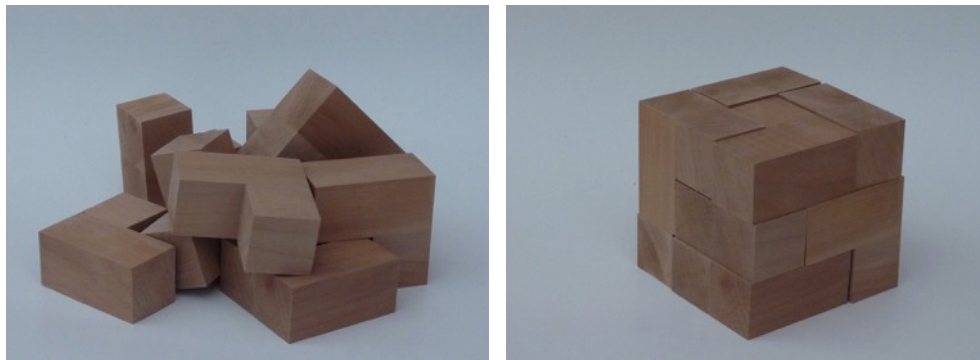


Abbildung 6: 9 Winkel (links) zu einem Würfel (rechts) zusammensetzen.

Nun entfernen wir in Gedanken von jedem Winkel einen Würfel. Zurück bleiben 9 Quader. Die 9 abgetrennten Würfel halbieren wir entlang der Diagonalen einer Seitenfläche. Aus jedem Würfel entstehen zwei Prismen. Es liegen nun 9 Quader und 18 Prismen vor. Jeden Quader verbinden wir in einem nächsten Schritt mit 2 Prismen, so dass 9 formverschiedene Puzzleteile entstehen. Wie müssten die 9 Puzzleteile sein, damit daraus ein Würfel zusammengesetzt werden kann?

baumit II: 9 Quader, $33.3 \times 33.3 \times 66.6\text{mm}$ und 9 Würfel, $S = 33.3\text{mm}$
9 Quader, $33.3 \times 33.3 \times 66.6\text{mm}$ und 18 Stück dreieckige, gerade Prismen,
 $S = 33.3\text{mm}$

Praxisbeispiel

Nach ersten räumlichen Arbeiten, begann der 11-jährige Rolf motiviert ein Würfelpuzzle zu erfinden. Er baute seine Modelle selbstständig, befestigte mit Malerklebband die Prismen an die Quader und fand eine Lösung mit neun verschiedenen Teilen. Diese skizzierte er von Hand in das Rasterpapier (Anhang). Mit Hilfe des Modells verleimte er sein Würfelpuzzle und bemalte die Teile mit seinen drei Lieblingsfarben (Abbildung 7). Später brauchte er seine Skizzen beim Zeichnen der Bauanleitung am Computer (Abbildung 8).

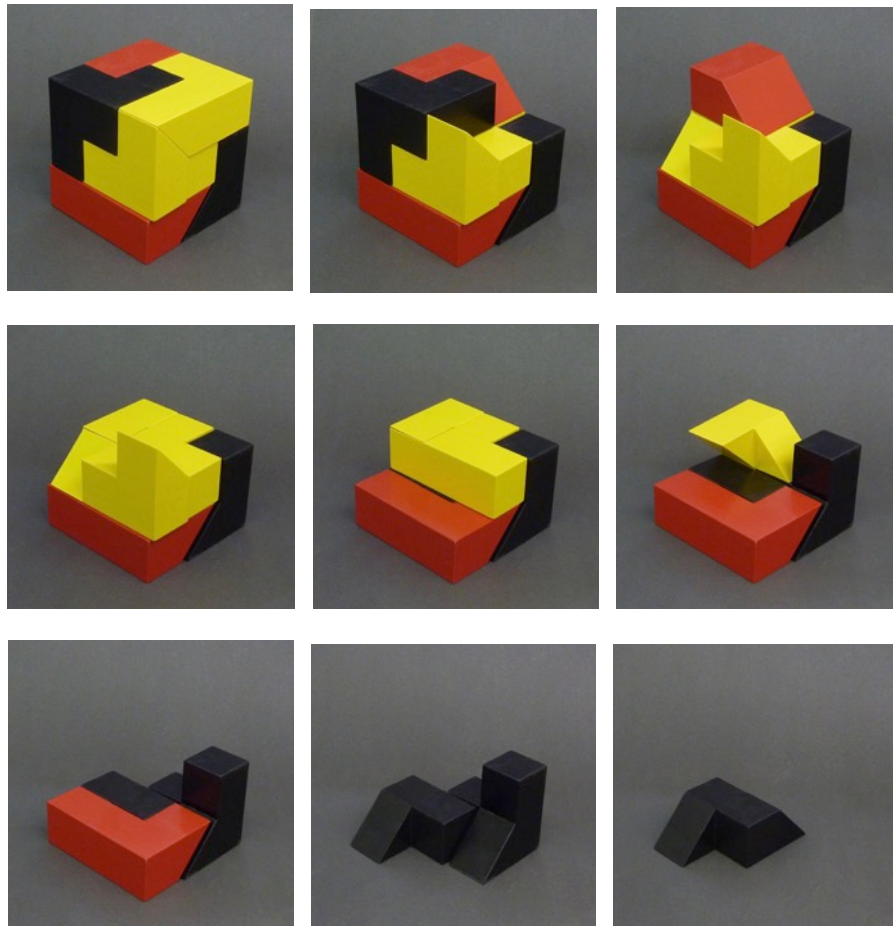


Abbildung 7: Das fertige Würfelpuzzle von Rolf, schrittweise zerlegt.

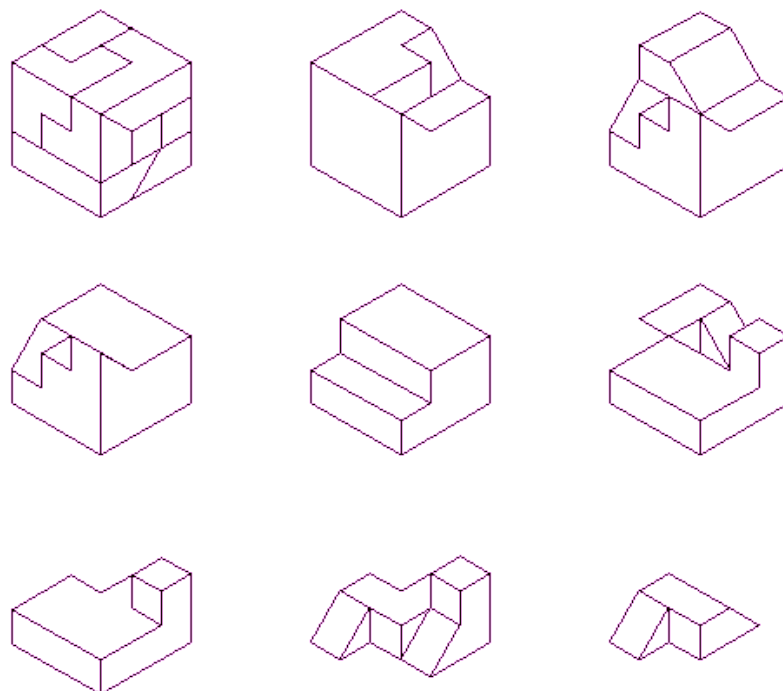


Abbildung 8: Bauanleitung zum Würfelpuzzle von Rolf.

Mit Prismen bauen

Thema V

Bauen wird unter anderem beeinflusst durch statische Gesetzmässigkeiten. Das heisst z.B. dass schräge Bauelemente leichter weg rutschen. Beim Sammeln geometrischer Erfahrungen, soll die Statik vorerst nicht einschränkend wirken. Dies gelingt, indem beim Entwickeln der Modelle die Prismen mit Malerklebband provisorisch zusammengeklebt werden. Das Modell kann durchs Lösen des Klebebandes einfach abgeändert werden, sollte es zu Gunsten einer besseren Idee verändert werden.



Abbildung 9: Prismen aus diagonal geteilten Würfeln.

Erste Versuche beim Bauen mit Prismen zeigen, dass andere Prinzipien gelten als beim Zusammensetzen von Würfeln oder Quadern. Das Finden und Anwenden von Prinzipien kann erfahren werden, wenn gezielt gebaut wird. Ziele könnten sein:

- es soll ein Objekt entstehen, das sich auf Grund des Musters schliesst. Im Kern kann ein Leerraum entstehen (Abbildung 10)
- es soll ein Objekt entstehen, das sich nach gleichem Muster schlangenförmig fortsetzt (Abbildung 11)
- das Objekt soll eine oder zwei Symmetrieebene(n) haben
- das Objekt soll drehsymmetrisch sein

Es ist faszinierend zu beobachten, wenn Kinder und Jugendliche beim Bauen mit Prismen entdecken, dass sich «linke» und «rechte» Formen unterscheiden. Sie sind einander Spiegelbild aber nicht deckungsgleich (= chiral). Chiralität kann auch in der Natur beobachtet werden. Unsere Hände sind z.B. chiral. (Hargittai, 1998).

Es kann vorkommen, dass Erfinder während des Arbeitens in ihren Objekten bestimmte Bedeutungen erkennen. Es fällt ein passender Name ein oder wird klar, welche Farbe oder Grösse die Skulptur haben muss und wo sie stehen soll.

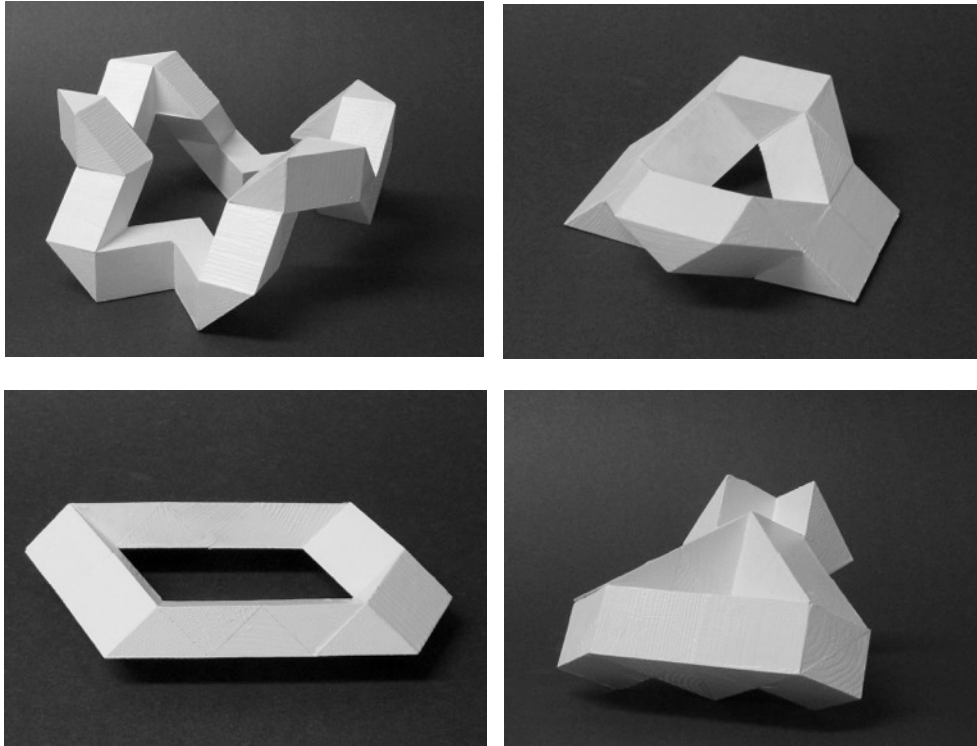


Abbildung 10: Geschlossene Formen. Beispiele aus der Werkstatt der Klinik Neuhaus, Bern (CH).

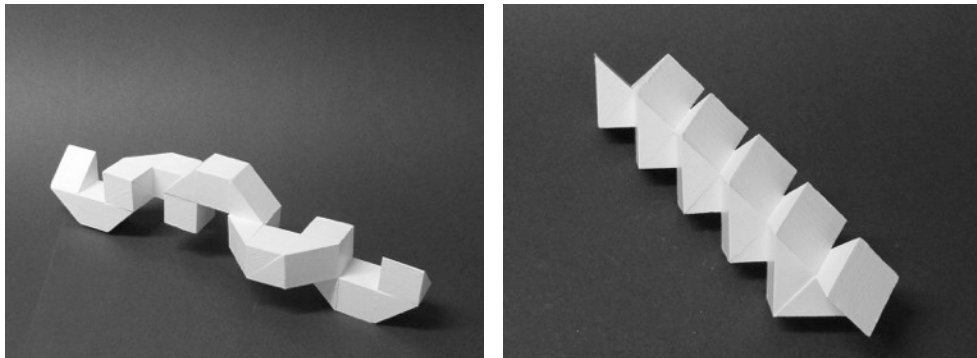


Abbildung 11: Schlangenförmige Objekte. Beispiele aus der Werkstatt der Klinik Neuhaus, Bern (CH).

baumit II: Prismen zum Bauen

Produktion der Prismen

Das Herstellen dieser Prismen erfordert eine Lehre. Es ist ein Kanal, in dem die Holzstäbe mit quadratischem Querschnitt auf der Kante stehend gehalten werden (Abbildung 12). Bei der abgebildeten Lehre ist der Kanal aus Massivholz mit einer weissen Kunstharzplatte belegt, damit die Holzstäbe leichter darüber gleiten. Das letzte Bild von Abbildung 12 zeigt, dass die gleiche Lehre auch an der Hobelmaschine gebraucht werden kann, wenn die geschnittenen Dreieckstäbe auf das genaue Mass gehobelt werden. Im letzten Arbeitsgang werden an der Kreissäge von den Dreieckstäben Prismen abgeschnitten.



Abbildung 12: In der speziellen Lehre (oben links) liegen die quadratischen Holzstäbe (oben Mitte) auf der Kante (oben rechts). Bei grösseren Querschnitten sind zwei Schnitte mit der Kreissäge nötig, der Stab wird nach dem ersten Schnitt gewendet (unten links). Im Anschluss ans Aufsägen, wird die gesägte Fläche gehobelt (unten rechts).

Praxisbeispiel

David (Sekundarstufe 1) erkannte während des Arbeitens plötzlich eine menschenähnliche Gestalt in seinem Modell. Die Gestalt ist auf einer Seite geduckt und in sich gekehrt. Sie nimmt wenig von der Welt wahr. Auf der anderen Seite strahlt sie der Sonne entgegen. David baute sorgfältig eine ca. 40cm hohe Skulptur, wählte die passenden Farben und war beim Vollenden seines Werks tief zufrieden (Abbildung 13).

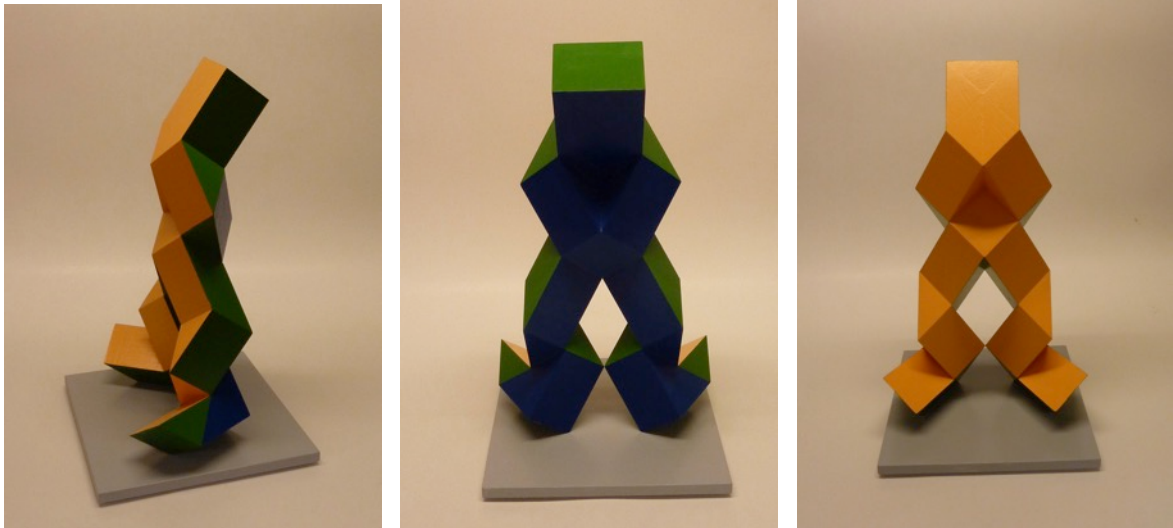


Abbildung 13: Skulptur von David.

Praxisbeispiel

Der 20-jährige Roberto musste angehalten werden, bei seiner Arbeit inne zu halten und die Modelle bewusst wahrzunehmen. Ständig wollte er diese sofort wieder verwerfen. Zur Weiterbearbeitung wählte er das Modell Abbildung 14 – Foto links. Er verleimte davon mehrere Exemplare und machte Farbversuche (Abbildung 14, Mitte). Es begann eine lange Auseinandersetzung mit den Farben, bis Roberto überzeugt war, dass er die Bedeutung seiner Skulptur «six» mit schwarzer Farbe aussen und Rot und Grün im Innern zum Ausdruck bringen konnte (Abbildung 14, rechts). Das Bemalen der fertigen Skulptur, innen mit Rot und Grün, war kaum zu realisieren. Die Qualität der Farbgebung überzeugte ihn erst, als er ein anderes Vorgehen herausgefunden hatte. Er verleimte zuerst sechs Teile, bemalte diese und setzte anschliessend seine Skulptur fertig zusammen.

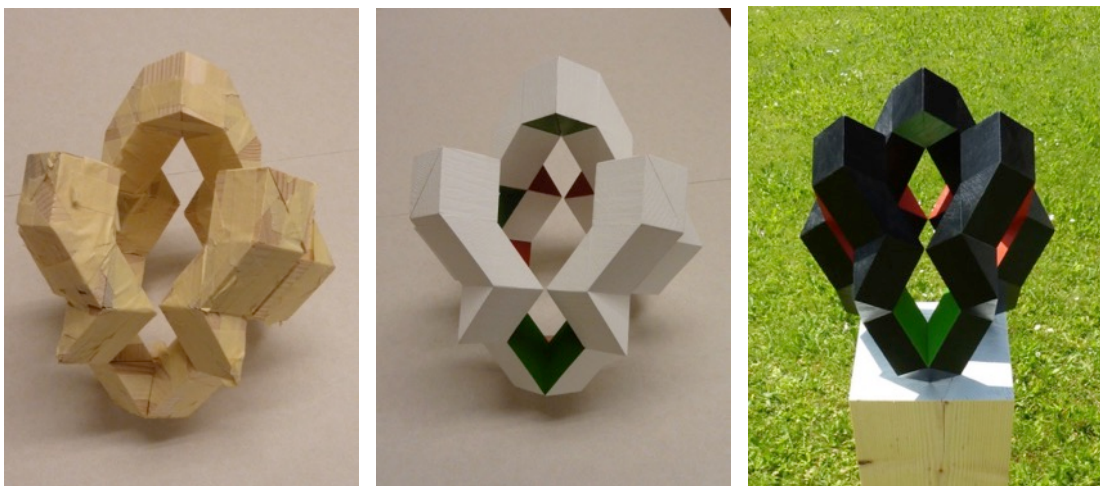


Abbildung 14: Skulptur «six» von Roberto.

Thema VI

Wenn Kinder und Jugendliche mit Prismen bauen, können sie auch die Formen verwenden, die durch Kippen entstehen (siehe Thema III).

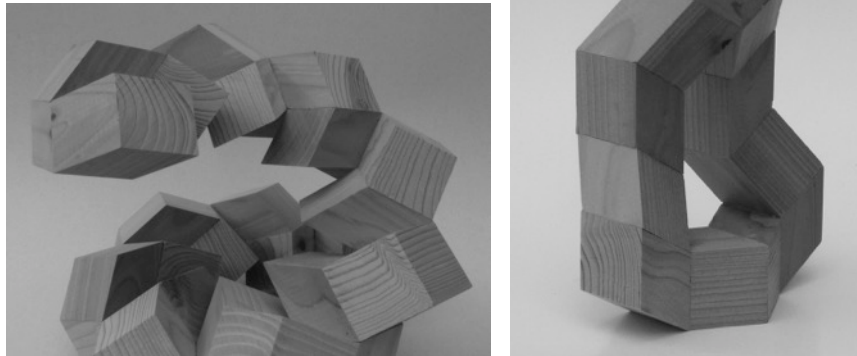


Abbildung 15: Objekte aus «gekippten» Würfeln: offen, endlos (links) und geschlossen (rechts).

baumit II: Prismen zum Bauen

«Warum scheuen Sie es auch so sehr, etwas zu wiederholen,
das schon vor Ihnen gesagt worden ist?
In Verbindung mit Ihren eigenen Gedanken erscheint das Alte
selbst doch immer von einer neuen Seite.»
Moses Mendelssohn (1729 – 1786) dt. Philosoph

entwickeln (Konventionen)

Volumen ist Grundfläche mal Höhe

Der Konvention Volumen $[V] = \text{Grundfläche } [G] \times \text{Höhe } [h]$ liegen zwei Prinzipien zu Grunde: Bonaventura Cavalieri (wahrscheinlich 1598 – 1647) veröffentlichte 1635 seine Überlegungen zur Berechnung von Körperinhalten (**Prinzip von Cavalieri**). «Liegen zwei Körper zwischen zwei parallelen Ebenen und sind die Inhalte der Schnittflächen der Körper mit jeder zur Grundfläche parallelen Ebene einander gleich, so haben diese Körper auch das gleiche Volumen.» (<https://www.lernhelfer.de>, Stand: 19.1.2016)

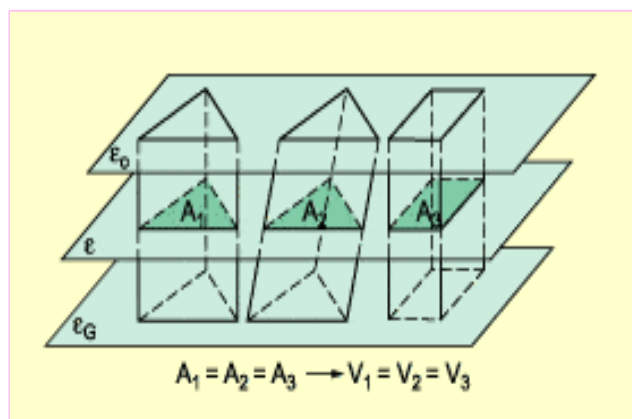


Abbildung 16: Cavalieri verstand die Verwandlung von einem Körper in einen anderen als «Fließen der Indivisiblen», d.h. kleiner, unteilbarer Schichten. Das gerade Prisma in der Abbildung «fließt» in ein schiefes (Bild: <https://www.lernhelfer.de> (Stand 19. Januar 2016)).

Das zweite Prinzip ($V = G \times h$) zur Berechnung von Körperinhalten ist die **Scherung**. Man stellt sich einen Stapel Spielkarten, senkrecht aufeinander geschichtet (=Quader) vor. Schichte ich sie schief oder bewegen sie sich beim Schichten im Kreis, entstehen in beiden Fällen gleich hohe Körper mit gleicher Grund- und Deckfläche. Die Körperform hat sich bei gleichbleibendem Volumen geändert.

Thema VII

Die Erkenntnis aus dem **Prinzip von Cavalieri** und dem **Prinzip der Scherung** soll «begreifbar», d.h. für die Hand wahrnehmbar gemacht werden.

Es wird ein Holzquader mit den Massen 25mm x 25mm x 100mm geschnitten. In Gedanken lässt man diesen Quader, nach dem Prinzip von Cavalieri, in ein schiefes Prisma «fließen» (Abbildung 17). Welche Ausdehnung hat es? Um zum Quader ein volumengleiches Prisma herstellen zu können, interessieren Breite und Dicke des Holzquaders (hobeln entsprechender

Holzleisten). Abgeleitet vom Holzquader wird der Leiste ein Prisma in gewünschtem Winkel und entsprechender Länge abgeschnitten.

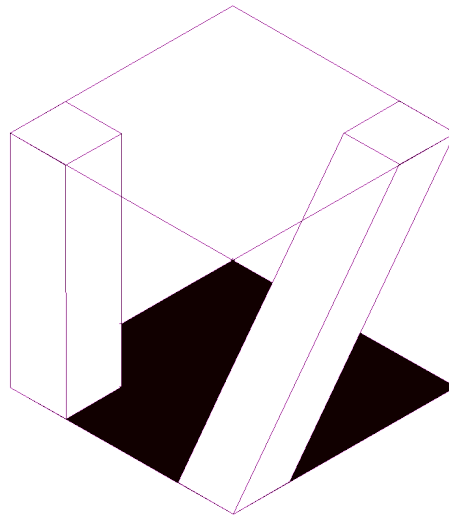


Abbildung 17: Raumbild eines Quaders und Prismas mit gleicher Grund- und Deckfläche zwischen zwei parallelen Ebenen und damit demselben Volumen (Bild: G. Stettler).

Breite, Dicke, Länge und Winkel können dem Raumbild (Abbildung 17) nicht entnommen werden, weil bei der räumlichen Darstellung Seiten verkürzt und Winkel verzerrt gesehen werden. Aus diesem Grund zeichnen Planer ihre Objekte in Normalprojektionen, d.h. aus verschiedenen Blickwinkeln. Sie geben in Projektionen immer die realen Messgrößen an (Abbildung 18). Im Grundriss kann die wahre Grösse der Schnittfläche des Prismas gemessen werden. Sie entspricht der des Quaders. Der Aufriss ermöglicht, die Werte von Länge, Winkel und Dicke zu bestimmen. Mit diesen Angaben wird die Produktion möglich. Aus einem Querschnitt können noch fehlende Informationen gewonnen werden (Abbildung 18, rechts unten).

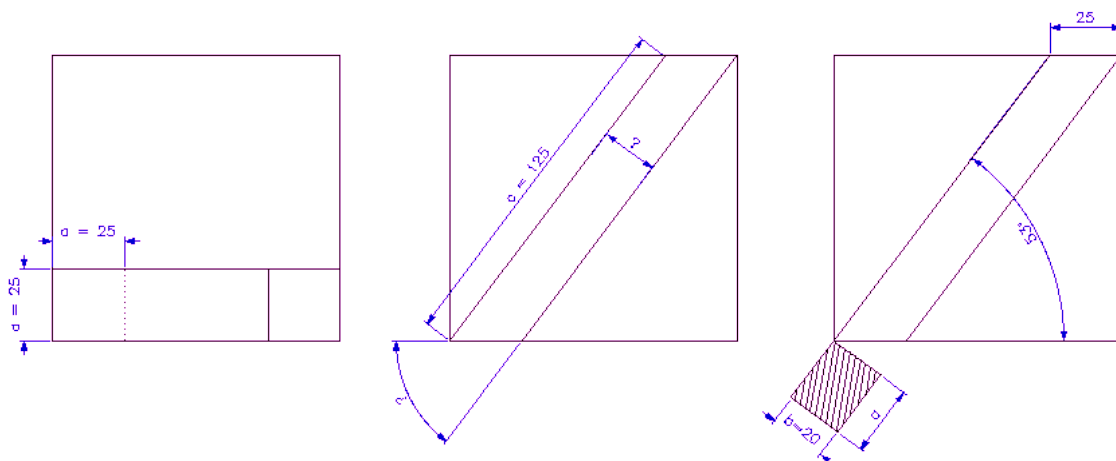


Abbildung 18: Im Grundriss (Links) und Aufriss (Mitte, rechts) sind Längen und Winkel des Prismas in der Abbildung nicht verzerrt.

Normalprojektionen machen sichtbar, dass sich durch das «Fließen» des Quaders in das schiefe Prisma der Querschnitt des Körpers verändert. In Raumbildern (Abbildung 17) ist diese Veränderung nicht so deutlich wahrnehmbar.

Wenn Jugendliche den Quader und das Prisma in der Hand halten, werden sie noch andere Begründungen finden, warum die beiden Körper das gleiche Volumen haben müssen. Die anderen Prismen zum Thema VII können ebenfalls verglichen werden. Und wer sich weiter mit dem Thema beschäftigen will, wird selber Körper planen und herstellen, die das Prinzip von Cavalieri widerspiegeln.

Die vertiefte Auseinandersetzung mit Prismen beim Berechnen der Volumen und der Bedeutung der Formel $V = G \times h$ hinterlässt an verschiedenen Orten im Hirn des jungen Menschen Spuren:

- Die Handlungen im prozeduralen Gedächtnis
- die mathematischen Fakten im semantischen Gedächtnis
- das individuelle Erleben im episodischen Gedächtnis

baumit II: Modell Cavalieri mit 4 verschiedenen Prismen

Wenn «Grundfläche mal Höhe» nicht mehr gilt

Thema VIII

Durch die Beschäftigung mit Prismen werden Jugendliche erkennen, dass bei Körpern, die von einer Grundfläche aus in eine Spitze führen, andere Gesetzmässigkeiten wirken müssen. Wir beschränken uns hier auf die Prinzipien bei Pyramiden.

Mit quadratischen Pyramiden in gerader und in schiefer Form lassen sich Überlegungen anstellen, die Jugendliche unterstützen Formeln zur Berechnung von Volumen und Oberfläche zu finden. Die Masse der Pyramiden von **baumit II** sind so gewählt, dass Jugendliche Vergleiche mit Körpern, die sie kennen, machen können. Manchmal helfen auch Abfallstücke aus der Produktion beim Erforschen solcher Prinzipien.

baumit II: 4 Würfel, $S = 50\text{mm}$

5 Stück dreieckige, gerade Prismen, $S = 50\text{mm}$

4 Stück quadratische, schiefe Pyramiden, $S = 50\text{mm}$

Netze, Flächen, Kanten

Thema IX

Mit Ausnahme von Thema II, enthält das Set **baumit II** keine Materialien, um Netze der besprochenen Prismen und Pyramiden herstellen zu können. Karton ist in den Schulen meist verfügbar oder kann leicht aufgetrieben werden.

Machen die Jugendlichen für den gekippten Somawürfel (Thema III) oder für das erfundene Würfelpuzzle (Thema IV) eine Verpackung, werden sie beim Einfüllen feststellen, dass sich das Füllen vom Zusammensetzen auf einem Tisch unterscheidet. Einfüllen verlangt unter Umständen eine andere Reihenfolge als das Zusammensetzen. In diesem Kontext können verschiedene Netzformen diskutiert oder alle möglichen Varianten gesucht werden. Die mathematischen Muster der Netze werden dadurch erlebbar.

Werden im Unterricht beim Verändern durch «Kippen» (Thema II) oder «Fliesen» (Thema VII) die Netze der jeweiligen Körper hergestellt, erleben die Jugendlichen, welche Körperflächen sich nicht verändern und welche sich verändern. Ähnliches gilt für die Kanten und Winkeln. Dabei können auch Eigenschaften wie «stumpf» oder «spitzig» erfahren werden.

«Wir müssen unbedingt Raum für Zweifel lassen, sonst gibt es keinen Fortschritt, kein Dazulernen. Man kann nichts Neues herausfinden, wenn man nicht vorher eine Frage stellt. Und um zu fragen, bedarf es des Zweifelns.»
Richard Feynman (1918 – 1988) Physiker

Neues zumuten

Eine Hirnhälfte ist spezialisiert für Neues

Thema X

Im Mathematikunterricht an der Volksschule und bei psychisch auffälligen Kindern und Jugendlichen, beobachtete ich, dass der Zugang zu mathematischem Handeln und Denken durch drei Angebote ermöglicht werden kann:

1. Mit Objekten in den Händen denken.
2. Als Erfinder tätig sein.
3. Begegnungen mit Neuem wagen.

Mit den Themen I bis IX wurden die zwei ersten Angebote ausführlich behandelt. Wenn im Mathematikunterricht Kinder und Jugendliche Neuem und Unbekanntem begegnen können, wird ihnen zugemutet, dass sie fähig sind, auftretende Fragen zu klären und Probleme selbstständig zu lösen. Unter Neuem und Unbekanntem werden Auseinandersetzungen verstanden, die noch nirgends beschrieben oder mathematisch-didaktisch aufgearbeitet worden sind. Der Mathematikunterricht wird belebt, wenn wir den Kindern und Jugendlichen Neues zumuten. Und auch wir Lehrkräfte fordern uns selber heraus, wenn wir Unbekanntem begegnen. Wir werden dabei zu Entdeckern und Erfindern und öffnen unsere Horizonte. In diesem Sinn ist das Thema X mit den Körpern im Sack offen für Neues.

baumit II: ein Sack mit neuen Körpern

Dank

Ich danke den Kindern und Jugendlichen, die sich auf das Handeln im Mathematikunterricht eingelassen haben. Ihre Arbeiten zeigen mir zweierlei; wie bedeutsam es ist, im Unterricht Erfinder zu sein und dass es sich lohnt, in Materialien zum Handeln zu investieren.

Mein Dank gilt auch meinem langjährigen Freund Lorenz Luginbühl. Er hat mich als Pädiater und Entwicklungsneurologe in die Neurobiologie des Menschen eingeführt und stets darauf hingewiesen, wie Handeln und Denken sich gegenseitig beeinflussen.

Meine Arbeit an diesen Kursunterlagen hat Maria Jakober begleitet. Ich schätze ihre Arbeit als Lektorin. Dank ihren Vorschlägen zur Gestaltung und ihren Textkorrekturen sind die Unterlagen verständlicher geworden.

Literatur

Hargittai, I. & M. (1998): Symmetrie – Eine neue Art, die Welt zu sehen. Rowohlt, Sachbuch, Hamburg.

Stettler, Gerhard (2013): baumit I. Spiel & Mathematik. Langnau..

Walther Gerd, van den Heuvel-Panhuizen M., Granzer D., Köller O. (Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Cornelsen Verlag, Berlin. Oder:
<http://www.edoc.hu-berlin.de/series/iqb/2011-3/PDF/3.pdf> (Stand: 19. Januar 2016).

Wilson Frank R. (2002): Die Hand – Geniestreich der Evolution. Rowohlt Taschenbuch Verlag. Reinbek bei Hamburg.

Wollring Bernd (2007): Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. <http://www.mathematik.uni-kassel.de/didaktik/HomePersonal/lilitakis/home/workshops/LernumgebungenWofSinusHessen07071.pdf> (Stand: 7. August 2013).

Internetquellen

baumit I: www.snets.it (Stand 20. Januar 2016)

KMK: http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf

Mathematikum: www.mathematikum.de (Stand: 19. Januar 2016)

Mathmaker: www.mathmaker.nl (Stand: 22. Februar 2016)

Prinzip des Cavalieri: <https://www.lernhelfer.de> (Stand: 19. Januar 2016)

Reifentiere Erzgebirge: www.reifentiere.de (Stand: 9. Januar 2016)

Rubik's Snake (2016): <https://www.youtube.com/watch?v=QoVfWA-7Xhk> (Stand 8. Januar 2016)

Quellen Zitate

Gowers, T. (2011): Mathematik. Reclam Sachbuch. Stuttgart.

Einstein: [http://www.zitateonline.de/literaturzitate/allgemein/19791/jedes"denken"wird"dadurch"gefoerdert"dass.html](http://www.zitateonline.de/literaturzitate/allgemein/19791/jedes%20denken%20wird%20dadurch%20gefoerdert%20dass.html) (Stand: 7. August 2013).

Galilei: <http://www.bk-luebeck.eu/zitate/galilei.html> (Stand: 7. August 2013).

Feynman: zitiert nach Taverna, E.: Unser Freund, das Genom: Das postgenomische Zeitalter ist eines der Synthese neuer Lebewesen. Schweizerische Ärztezeitung, 2013; 94:11, Seite 444 (13. März 2013).

Feynman: <http://www.zitate-online.de/stichworte/neues> (Stand: 15. Februar 2016).

Mendelssohn: http://www.gutzitiert.de/zitat_autor_moses_mendelssohn_thema_fortschritt_zitat_7890.html (Stand: 7. August 2013).

Anhang

Rasterpapier

