

baumit I

SPIEL & MATHEMATIK

Gerhard Stettler

Kursunterlagen Bruneck 2013

Korrigenda

Seite 22, Zeile 16, neu:

Holzarten her. Das Volumen aller Polykuben entspricht 64 Einzelwürfeln. Als Ausgangspunkt zum

Seite 27, Literatur, neu:

Wittmann, Erich Chr. (2002): Schauen und Bauen (Spiel). Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart.
Verlagsbestellnr. 19975.

Seite 28, Anhang, Materiallisten, Inhalt Kiste 2, neu:

5	Quader	3	100	20	20	Thuja
---	--------	---	-----	----	----	-------

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
Handeln und Denken	5
entdecken (Realitäten)	7
Form und Volumen	7
Das Packproblem von Conway	8
erfinden (Inventionen)	11
Punktwürfel	11
Schauen und Bauen	14
Der Somawürfel von	16
entwickeln (Konventionen)	24
Masse	24
Längen, Flächen und Körper	24
Dichte	24
Ähnlichkeit	25
Kongruenz	25
Strategien	25
Kodierung	25
Dank	26
Literatur	27
Quellen Zitate	27
Anhang	28
Materiallisten baumit I	28
Kopiervorlagen	28

Zitiervorschlag: Stettler, G. (2013): baumit I. Spiel & Mathematik. Langnau.

„Ein mathematischer Gegenstand ist,
was er tut.“

Timothy Gowers (*1963) engl. Mathematiker

Einleitung

„Wohl kein Schulfach spaltet Schüler, Lehrer und Eltern mehr als die Mathematik“ ist Manfred Spitzer überzeugt (Spitzer, 2009, S. 253). Wer Mathematik unterrichtet, hilft mit, diese Situation zu verändern. Spitzer (2009) legt aus neurobiologischer Sicht dar, dass Lernen von drei Faktoren günstig oder ungünstig beeinflusst wird: Aufmerksamkeit, Motivation und Emotionen (Spitzer, 2009, S. 139-200). Wie ist es möglich im Mathematikunterricht diesen drei neurobiologischen Gegebenheiten des Hirns gerecht zu werden?

Im Mathematikunterricht an der Volksschule und bei der Arbeit mit psychisch auffälligen Kindern und Jugendlichen in der Klinik habe ich beobachten können, dass Schülerinnen und Schüler einen Zugang zu mathematischem Denken finden können, wenn drei Angebote geschaffen werden:

- Etwas Neuem begegnen können.
- Mit Objekten in den eigenen Händen denken.
- Erfinder sein.

Selbstverständlich sind diese drei Voraussetzungen, wenn sie erfüllt sind, noch keine Erfolgsgarantie. Aber es lohnt sich, Zeit und Energie in sie zu investieren.

Weil ich bei der Suche nach geeigneten und finanzierbaren Materialien für die Hand des Schülers nicht immer fündig wurde, begann ich, sie selber herzustellen. Bei diesem ersten Set **baumit I** sind alle Körper bewusst rechtwinklig gewählt. Das soll Lehrende animieren, das Set zu kopieren und in der Schulwerkstatt selber herzustellen. Auf Farbunterschiede durch leuchtende Farben wurde bewusst verzichtet, weil dadurch das Interpretieren und Darstellen räumlicher Phänomene erschwert wird. Wirksamer scheinen mir die natürlichen farblichen und strukturellen Unterschiede verschiedener Holzarten. Die Bauklötze von **baumit I** sind in zwei Holzkistchen gepackt. Ausgangspunkt für die Grösse der Quader in Kiste 1 ist der Kubikdezimeter. Durch Halbieren entstehen Quader mit den Seitenlängen 5 cm und 2,5 cm. In Kiste 2 sind die Bauklötze aus andern Holzarten gefertigt. Damit können beim Bauen mit den verschiedenen Holzfarben Muster sichtbar gemacht werden. In dieser Kiste sind auch Bauklötze vorhanden, deren Grösse sich am Kubikzentimeter orientiert. Dadurch entstehen Seitenlängen von 2 cm und 3 cm.

Die im Folgenden beschriebenen Themen mit **baumit I** sind kein fertiges Lernprogramm zum Fördern des räumlichen Vorstellungsvermögens oder Entwickeln des Problemlöseverhaltens sowie besseren Verständnis von Massen. Ich ordne die Aufgaben auch nicht einer bestimmten Schulstufe zu. Es sind vielmehr Themen oder Erfahrungen, denen ich in den letzten Jahren

begegnet bin und die ich in meinem Mathematikunterricht immer wieder gerne aufnehme. Mit mehreren davon habe ich in meinem Berufsalltag Sternstunden erlebt. Ich ermutige Mathematiklehrkräfte, die beschriebenen Beispiele zu verändern und der Situation in der eigenen Klasse so anzupassen, dass damit Lernen möglich wird. Das kann beispielsweise beim Erfinden nur bis zum Modell führen; in einer anderen Situation reift die Erfindung bis zum Prototyp oder sogar bis zum fertigen Produkt.

baumit I ist so zusammengestellt, dass mit den Körpern Mathematik entdeckt, erfunden und entwickelt werden kann. Beim Entdecken denke ich an das sich Nähern an Realitäten und an das Erkennen von Mustern. Diese Lernsituation unterscheidet sich vom Erfinden. Beim Erfinden entsteht etwas Neues (Invention). Dies kann der Fall sein, wenn Kinder für die andern der Klasse Aufgaben erfinden oder neue Würfelpuzzles kreieren oder sich anderen Bauaufgaben stellen. Ein Gleichgewicht zwischen Konvention & Invention ist für das mathematische Lernen bedeutsam (Wollring, 2007, S. 2). Dies im Mathematikunterricht zu erreichen ist eine hohe Kunst. Zum Dokumentieren des Entdeckens und Erfindens sind Lernende oft auf Hilfsmittel angewiesen. Diese habe ich als Kopiervorlagen (K1 – K4) im Anhang zusammengestellt. Zum Entdecken und Erfinden kommt noch ein Drittes dazu, das Entwickeln der mathematischen Konventionen. Es wird sich weisen, welche Bedeutung Materialien, die zum Handeln anregen, im modernen Mathematikunterricht der Volksschule mit den Kompetenzbereichen «Zahl und Variable», «Form und Raum», «Grössen und Masse», «Funktionale Zusammenhänge», «Daten und Zufall» beigemessen werden muss. **baumit I** möge dazu einen Beitrag leisten.

Langnau, Juli 2013

Gerhard Stettler

„Jedes Denken wird dadurch gefördert, dass es in einem bestimmten Augenblick sich nicht mehr mit Erdachtem abgeben darf, sondern durch die Wirklichkeit hindurch muss.“

Albert Einstein (1879 – 1955) Physiker

Handeln und Denken

Die Quader laden zum Spielen ein. Wenn Kleinkinder bauen, erobern sie den Raum. Sie drängen hinaus in die Ebene und hinauf gen Himmel. Architekten und Designer entwickeln ihre Ideen an Modellen. Diese werden auch beigezogen, wenn Absichten und Entscheide kommuniziert werden. Sowohl Kleinkinder als auch Berufsleute suchen, finden, vergleichen und optimieren handelnd. Und beide unterscheiden nicht zwischen Handeln und Denken. Die Fragen sind berechtigt, warum wir Pädagogen diese Unterscheidung im Schulunterricht machen und warum wir dazu neigen, auch im Mathematikunterricht das Denken höher zu gewichten als das Handeln. Der amerikanische Neurologe Frank R. Wilson (2002, S. 310) hat diesbezüglich die folgende Meinung: „Auch hält die alte Trennung von Körper und Geist einer näheren Prüfung nicht stand, wenn wir die höchst komplexen Formen kulturell bedingten Verhaltens betrachten. [...] Die unmissverständliche Botschaft der Biologie an die Pädagogen lautet: Die beste Technik zur Förderung menschlicher Intelligenz ist die Vereinigung (nicht die Teilung) von Körper und Geist.“

baumit I soll mithelfen, Mathematik sicht- und greifbar zu machen oder anders formuliert: Kindern und Jugendlichen wird mit diesen Materialien die Möglichkeit gegeben, ihre Mathematik in die Hand zu nehmen und handelnd weiter zu entwickeln. Denn beim Eintritt in die Grundschule bringen Kinder einen vielfältigen Handlungserfahrungsschatz mit. Viele Begriffe der Mathematik und ihre Eigenschaften wie Drehen, Schieben, vorne, hinten, Volumen (leeren, füllen, umschütten) usw. haben Kinder in Handlungen erfahren und im motorischen Gedächtnis gespeichert. Zum Zeitpunkt des Schuleintritts hat das Kind längst gelernt, seine Handlungen soweit zu optimieren, damit etwas gelingen kann. Auf diesem Lernweg ist das Kind oft gescheitert, hat die Sache neu angepackt und herausgefunden, wie es sein Ziel erreichen kann. Handeln und Denken sind bei diesen Prozessen eng miteinander verknüpft. Es gilt beim Mathematiklernen mit geeigneten Materialien das Handeln und Denken eng verknüpft zu halten. Aus neurobiologischer Sicht gibt es keinen Grund, im Schulunterricht plötzlich das Denken vom Handeln zu trennen. Mit dem Gegenstand, den wir Menschen in den Händen halten oder der in unseren Händen entsteht, können wir eine enge Beziehung aufbauen. Erst über den Werksinn finden Kinder Zugang zum mathematischen Sinn, sagt der deutsche Mathematikdidaktiker Bernd Wollring (2007, S. 7): „Der Werksinn der bearbeiteten Gegenstände ist ein Element, das insbesondere im Elementarbereich und in der Grundschule einzufordern ist. Natürlich gibt es im

Mathematikunterricht wie in allen anderen Unterrichten zu bestimmten Fächern auch Elemente, die ein spezifisches Trainieren bis zur Geläufigkeit erfordern. Aber die Beziehung von Lernenden zum bearbeiteten Gegenstand baut sich im Wesentlichen über den Werksinn auf, d. h. über seine oder ihre spezifische Wertschätzung oder Bedeutungseinschätzung dieses Gegenstandes über die Mathematik hinaus, sei es durch eine Einschätzung der Nutzbarkeit oder sei es durch eine Einschätzung von Schönheit oder Attraktivität. Der Werksinn ist wesentlich bestimmend dafür, positive Bildungserlebnisse als lange haltbare Grundbausteine zum Aufbau eines Wissensnetzes zu gewinnen.“

Wenn ein Kind über den Gegenstand einen Zugang zum mathematischen Sinn gefunden hat, stellt sich im Schulalltag die Frage, wie sich dieser mathematische Fund nachhaltig festigen lässt um nicht gleich wieder verloren und vergessen zu gehen. Ich schlage vor, dass Kinder bedeutsame Gegenstände behalten dürfen. Die Kinder werden die Gegenstände mit nach Hause nehmen und mit ihnen in den Händen eine andere Mathematik beschreiben als wenn sie mit leeren Händen zu erzählen versuchen.

Dass sich die Handlungskompetenz eines Kindes mit seiner Sprachkompetenz nicht parallel entwickelt, ist keine neue Erkenntnis. Beobachtungen des Handelns mathematischer Inhalte geben oft einen differenzierteren Einblick in die Denkwelt des Kindes als seine Darstellungen oder seine sprachlichen Äußerungen vermuten lassen. Aber ich hege Zweifel, dass diese Fähigkeiten im Mathematikunterricht auch gleichwertig gewürdigt werden. Möglicherweise fehlen uns Pädagogen die Instrumente um das Handeln differenziert einschätzen und als Kompetenz beurteilen zu können.

„Man kann niemanden etwas lehren,
man kann ihm nur helfen,
es in sich selbst zu finden.“

Galileo Galilei (1564 – 1642) Mathematiker, Physiker, Astronom

entdecken (Realitäten)

Form und Volumen

Thema I

Dass ein wachsender Würfel mit doppelter Seitenlänge das achtfache Volumen erreicht hat, kann mit den Würfeln von **baumit I** selber entdeckt werden.

Dieses Grösserwerden kann auch verstanden werden als die Veränderung eines Würfels, der an drei Seitenflächen angebaut wird. Die Würfelseite a bleibt konstant. Mit den Quadern und Würfeln aus der folgenden Materialliste kann dieser Würfel auf verschiedene Arten zusammengesetzt werden. Es ist zuerst zu klären, welche Bauweise der Formulierung $(a+b) \times (a+b) \times (a+b)$ entspricht.

Tabelle 1: Materialliste (Masse in mm).

Nr.	Bestandteil	Anz.	Länge	Breite	Dicke	Bemerkungen
1	Würfel	1	25	25	25	Kiste 1
2	Würfel	1	50	50	50	Kiste 1
3	Quader	3	50	25	25	Kiste 1
4	Quader	3	50	50	25	Kiste 1
Kopiervorlage 1 (K1)						

Thema II

Bei der Bauweise $(a+b) \times (a+b) \times (a+b)$ lässt man nun die Würfelseite $a = 100\text{mm}$ konstant, variiert aber b . Die Körper von **baumit I** ermöglichen das Bauen der drei Würfel mit der Zunahme $b = 10\text{mm}$, $b = 20\text{mm}$ und $b = 30\text{mm}$.

Die Wirkung dieses Wachsens kann noch deutlicher wahrgenommen werden, wenn diese Würfelreihe zusätzlich aus Karton gefaltet und zusammengeleimt wird. Das Wachsen in Wertetabellen und als Graph zu dokumentieren ist das eine. Aber mit unserem Augenmass dieses Wachsen zu deuten und beurteilen zu können, das andere. Ich glaube nicht, dass ich der Einzige bin, der die Volumenverdoppelung nicht sofort „eingesehen“ hat. Auf diese Modellreihe hat mich Herr Prof. B. Wollring aufmerksam gemacht (mündl. Mitteilung).

Tabelle 2: Materialliste für den Würfel $a = 100$, $b = 10$ (Masse in mm).

Nr.	Bestandteil	Anz.	Länge	Breite	Dicke	Bemerkungen
1	Würfel	1	100	100	100	Kiste 2
2	Würfel	1	10	10	10	Kiste 2
3	Quader	3	100	100	10	Kiste 2
4	Quader	3	100	10	10	Kiste 2
Kopiervorlage 1 (K1)						

Das Packproblem von Conway

Der Mathematiker J. H. Conway (*26.12.1937, Liverpool) hat als Lösung des Packproblems mehrere Würfelpuzzles vorgeschlagen. Das hier vorgestellte Beispiel empfinde ich als besonders schön oder besser gesagt, ich finde es genial.

Thema III

Beim Packen kann es um folgendes gehen: Da ist eine Kiste, daneben liegen Holzklötze, die geschickt geordnet in der Kiste Platz finden sollen. Wer ans Werk geht, füllt ein und wird auch gezwungen sein, die Kiste wieder zu leeren um neu zu beginnen und anders zu ordnen. Dies ist ein anderer Vorgang als neben der Kiste den Kisteninhalt zusammen zu setzen. Denn Füllen – Leeren und Zusammensetzen – Zerlegen finden in verschiedenen Umgebungen statt.

Thema IV

Packt man das Puzzle von Conway wie ein Geschenk in Papier und zeichnet man die sichtbaren Berührungslinien der Quader auf den sechs Flächen des zusammen gesetzten Würfels innen auf die Papierhülle, entdeckt man auf dem aufgefalteten Würfelnetz ein beachtenswertes Muster.

Mit Füllen – Leeren, Zusammensetzen – Zerlegen und mit Einpacken – Auspacken kann man sich dem Würfel von Conway auf drei verschiedene Arten nähern und beginnt dabei zu ahnen, was Berlekamp et al. (1986, S. 42) zu Raumpuzzles dachten:

„Nach unserer Meinung ist ein Puzzle gut, wenn es einfache Teile hat, aber schwierig zu lösen ist. Mit vielen komplizierten Teilen kann natürlich jeder ein schwieriges Puzzle zuwege bringen; aber wie muss man es anstellen, aus wenigen einfachen Stücken ein ganz schwieriges Puzzle zu machen?“

Damit kein Missverständnis entsteht: Für mich ist das «Packproblem von Conway» kein Beispiel für handlungsorientierten Unterricht. Die Handlung allein genügt nicht. Es ist wichtig Kinder und Jugendliche anzuhalten, ihre Handlungserfahrungen zu dokumentieren. Im Dokument sind die Beobachtungen, die Irrwege, die Zweifel oder die Lösungsansätze festgehalten und die Auseinandersetzung mit dem Thema wird durch das Dokumentieren bewusst unterbrochen. Nimmt das Kind zu einem späteren Zeitpunkt das Thema wieder auf, kann es sich in seinen Dokumenten über den Stand seiner Erfahrungen zuerst informieren. Die Zeichnungen, die Wortkreationen sind sehr persönlich und müssen als solche stehen bleiben. Als Lehrperson verstehe ich diese Dokumente der Kinder nicht immer. Das ist auch nicht nötig, weil das Kind am Anfang seine Handlungen nur für sich selber dokumentiert. Erst zu einem späteren Zeitpunkt ist im Unterricht zu überlegen, wie ein Dokument aussehen könnte, damit es die anderen der Klasse verstehen. Damit beginnen Kinder Konventionen der Mathematik anzuwenden: Begriff, Zeichnung, Wertetabelle, Graph, Term.

Im Unterricht habe ich versucht, das Geheimnis und den Zauber dieses Puzzles nicht gleich preiszugeben. Ich erwähnte den Erfinder, J. H. Conway, am Anfang nicht und nannte das kleinste Puzzle W3. Damit wollte ich verhindern, dass die Kinder und Jugendlichen (oder deren Familienangehörige) sofort im Internet zum Thema recherchieren können.

Das Puzzle W3 besteht aus drei gleichen Würfeln und sechs gleichen Quadern. Nach den gleichen Packstrategien kann man das Puzzle mit Quadern aus **baumit I** weiter zu W5 wachsen lassen.

Wie würden W7, W9, W11 ... Wx aussehen und welche Quader wären nötig, um sie zu bauen? Sich auf diese Entdeckungsreise zu machen wird zum spannenden Projekt. Das garantiere ich.

Tabelle 3: Materialliste W3 (Masse in mm).

Nr.	Bestandteil	Anz.	Länge	Breite	Dicke	Bemerkungen
1	Quader	6	50	50	25	Kiste 1
2	Würfel	3	25	25	25	Kiste 1
Kopiervorlage 1 (K1)						

Tabelle 4: Materialliste W 5 (Masse in mm).

Nr.	Bestandteil	Anz.	Länge	Breite	Dicke	Bemerkungen
1	Quader	6	100	50	25	Kiste 1/2
2	Quader	6	75	50	50	Kiste 1
3	Würfel	5	25	25	25	Kiste 1
Kopiervorlage 1 (K1)						

„Was ich nicht bauen kann,
kann ich nicht verstehen.“
Richard Feynman (1918 – 1988) Physiker

erfinden (Inventionen)

Punktwürfel



Abbildung 1 : Spielwürfel



Abbildung 2: Modell



Abbildung 3: Puzzle aus Holz.

Thema V

Überträgt man von einem Spielwürfel die 21 Punkte auf einen Würfel, zusammen gesetzt aus neun gleichen Holzquadern mit quadratischem Querschnitt, entsteht je nach Lage der Quader ein herausforderndes Puzzle. Es ist ratsam am Anfang die Anordnung der Punkte auf dem Spielwürfel genau zu übernehmen, auch die Richtung bei den Punktzahlen 2, 3, und 6. Der Spielwürfel kann so beim Zusammensetzen des Puzzles als Orientierungshilfe dienen. Zudem erleichtert es im Gespräch beim Klären aufkommender Fragen zu argumentieren und begründen.

Der Spielwürfel mit den Punkten 1 bis 6 ist durch drei Merkmale gekennzeichnet:

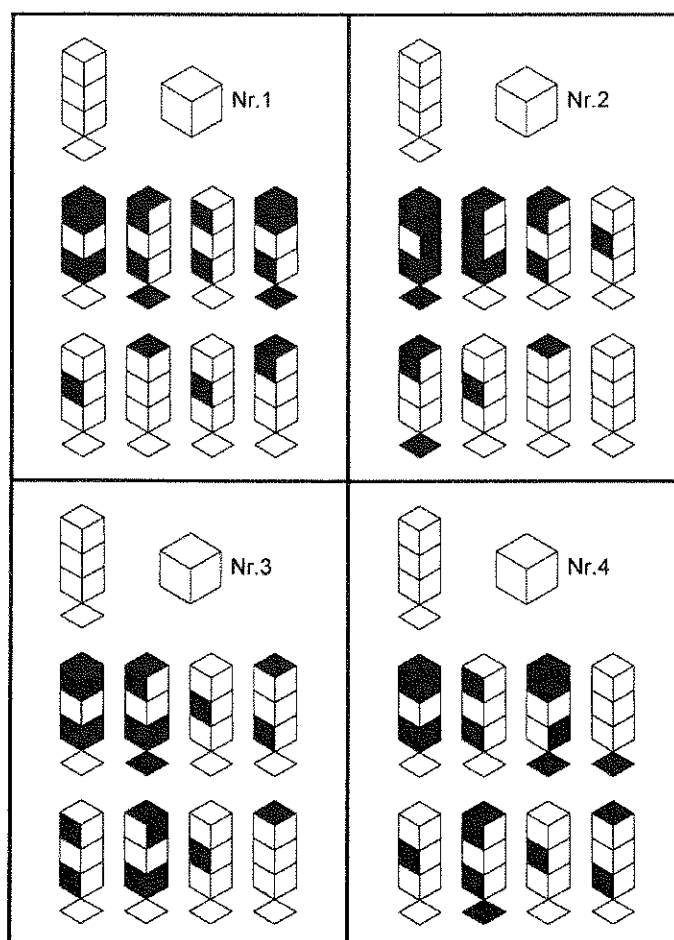
1. die Summe der Punkte gegenüberliegender Seiten ist 7
2. die Punktzahlen 4, 5 und 6 sind über eine Ecke gegen die Richtung der Uhrzeiger angeordnet (Abbildung 1)
3. die Ausrichtung der Punkte für 2, 3 und 6 ist vom Spielwürfel zu übernehmen

Der Anfang könnte sein, einen einfachen und einen schwierigen Punktwürfel zu erfinden. Kinder sind interessiert und stellen sich dieser Aufgabe gerne. Die vielen verschiedenen Erfindungen einer Gruppe geben Anlass zum Austausch.

Praxisbeispiel

Jim (10-jährig, Name geändert) begann bei mir in der Werkstatt der Klinik, sich mit Punktwürfeln auseinanderzusetzen. Mit Quadern und Haftetiketten erfand er zuerst ein leichtes und anschliessend ein schwieriges Puzzle (Abbildung 2). Er arbeitete konzentriert und selbstständig. Die Arbeit gefiel ihm. Gemeinsam suchten wir nach Möglichkeiten, seine Ideen zu dokumentieren. Es entstanden die Kopiervorlagen K2 und K3. Damit konnte er seine Erfindertätigkeit fortsetzen. Am Schluss hatte er zwölf verschiedene Punktwürfel. Seine Handnotizen überarbeitete er am Computer zu Aufgabenkarten für andere Kinder und Jugendliche. Wären verschieden gepunktete Quader vorhanden, könnte eine Aufgabenkarte von Jim ausgewählt und mit Zusammensetzen begonnen werden. Deshalb begann Jim, mit den Modellen aus Quadern mit Haftetiketten eine Sammlung verschieden gepunkteter Quader zu produzieren. Er bohrte in Holzquader 4 mm-tiefe Löcher und klebte farbige Kartonrondellen hinein. Die Sammlung ist noch nicht fertig. Andere Kinder könnten sie fortsetzen.

Aufgabenkarten von Jim:



Thema VI

Erfindet man Punktwürfel und verzichtet dabei auf Merkmal Nr. 3 und später solche ohne die Merkmale Nr. 2 und Nr. 3, nehmen die Schwierigkeiten beim Lösen zu. Man stösst gelegentlich an die Grenzen des Lösbaren.

Steht wenig Zeit zur Verfügung, sich mit dem Thema „Punktwürfel“ zu beschäftigen, eignen sich die Quader von **baumit I** dazu gefundene Lösungen mit Haftetiketten festzuhalten (Abbildung 2). Die Punkte können später wieder entfernt und die Quader für andere Aufgaben benutzt werden. Dauerhafter sind Puzzles, bei denen die gefundene Punktverteilung mit wasserfestem Stift auf die Quader übertragen wird. Abbildung 3 zeigt als weitere Variante Quader aus dem rötlichen Holz des Mammutbaumes bei denen in die gebohrten Löcher runde Holzplättchen aus Fichte geleimt wurden.

Tabelle 5: Materialliste (Masse in mm).

Nr.	Bestandteil	Anzahl	Länge	Breite	Dicke	Bemerkungen
1	Quader	9	75	25	25	Kiste 1
1 Spielwürfel						
Kopiervorlagen 2 & 3 (K2, K3)						

Thema VII

Wie viele verschieden gepunktete Holzquader hat eine Sammlung, um alle möglichen Punktwürfel bauen zu können?

Thema VIII

Die Auseinandersetzung mit Punktwürfeln kann auch anders beginnen: Lernende suchen zuerst nach verschiedenen Lösungen mit den neun Quadern einen Würfel zu bauen (siehe Kopiervorlage 3 K3). Überträgt man zu einem späteren Zeitpunkt das Muster des Punktwürfels auf die gefundenen Anzahl Baulösungen, entdeckt man, dass die Anzahl Lösungen verändert wird. Zwei Prinzipien – das Muster des Punktwürfels und das Bauen eines Würfels mit den neun Quadern – beeinflussen einander.

Schauen und Bauen

„Schauen und Bauen“ kann zurückverfolgt werden im 25-jährigen Projekt „mathe2000“ von E. Ch. Wittmann und G. N. Müller. Dazu gehört u.a. auch „Schauen und Bauen, Geometrisches Spiel mit Quadern“ (Wittmann, 2002).

Es geht darum, dass Kinder schon in der Grundschule angehalten werden, Objekte aus verschiedenen Blickrichtungen zu betrachten und darzustellen. Was das Kind am Anfang aus den vier Himmelsrichtungen und aus der Vogelperspektive sieht und zeichnet, erscheint auf dem Papier nicht als perspektivische Darstellung, sondern als fünf verschiedene Ansichten des gleichen Objekts. Dies entspricht der Darstellungsart auf Detailplänen im Ingenieurwesen, bei Handwerkern und in der Architektur.

Mit «Schauen und Bauen» ist das Kind mit einer Konvention des Planzeichnens konfrontiert, die dem menschlichen Naturel am Anfang eher widerspricht. Kinder zeichnen Räume und Gegenstände zuerst auf ihre ganz eigene Art „perspektivisch“ und nicht mit Hilfe von mehreren Ansichten, die nur in Kombination miteinander als Ganzes interpretiert werden können. Es ist deshalb im Unterricht entsprechende Nachsicht geboten. Das Kind braucht Zeit, sich an «Schauen und Bauen» zu gewöhnen. Es muss die Möglichkeit haben, im Verlaufe der Volksschule dieser Konvention immer wieder zu begegnen und sie anwenden zu können, damit eine Kompetenz im Darstellen und im Interpretieren entstehen kann.

Thema IX

Trotz des Bezugs zu einer Konvention nehme ich dieses Thema unter das Kapitel «erfinden», weil Kinder und Jugendliche mit dem Planzeichnen Erfinder werden können. Sie bauen mit Quadern Gebäude und zeichnen davon die fünf Ansichten. Mitschüler bauen an Hand dieser Pläne das Gebäude wieder auf. Am Anfang kann das «Schauen und Bauen» erleichtert werden, indem das Gebäude aus gleichen Quadern besteht (z.B. 100x50x25mm) und auf einem Rasterpapier steht, das in den Dimensionen mit den Quadern übereinstimmt.

«Schauen und Bauen» ermöglicht den Kindern, sich gegenseitig auch anspruchsvolle Aufgaben zu stellen und miteinander knifflige Plansituationen zu klären, wenn sie nach bestimmten Gesichtspunkten bauen und Pläne zeichnen, z.B.:

- eine Ansicht fehlt/zwei Ansichten fehlen
- eine der fünf Ansichten ist falsch gezeichnet/irgendwo ist ein Fehler
- zwei Ansichten sollen gleich aussehen
- Ansichten weglassen, ohne die Interpretation unmöglich zu machen
- Objekte als Grundriss – Ansicht – Seitenriss darstellen

Tabelle 6: Materialliste (Masse in mm).

Nr.	Bestandteil	Anzahl	Länge	Breite	Dicke	Bemerkungen
1	Quader	3	100	50	25	Kiste 1
Kopiervorlage 4 (K4)						

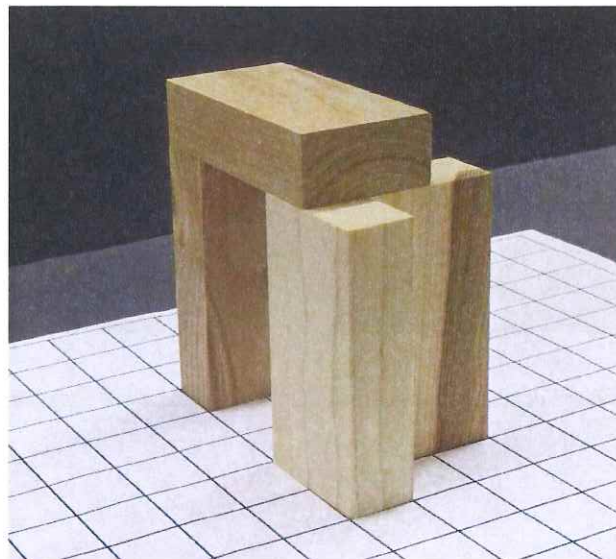


Abbildung 4 Beispiel einer Figur aus drei Quadern.

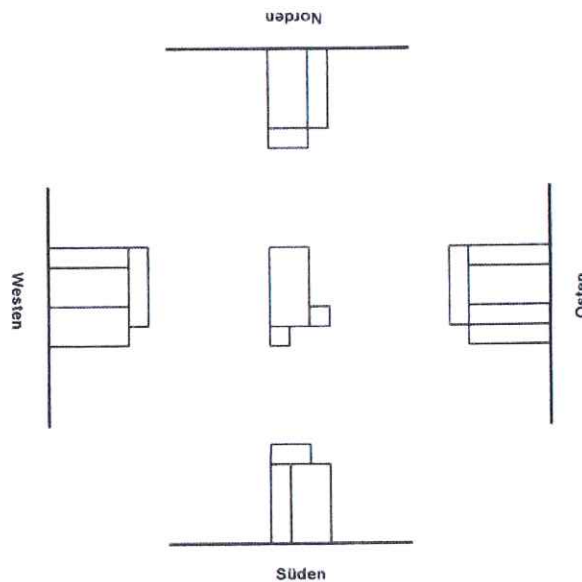


Abbildung 5 Plan zur Figur Abbildung 4.

Der Somawürfel von

Der Däne Piet Hein (1905 – 1996) ist nicht der einzige Erfinder eines Somawürfels. Die Kombination der sieben verschiedenen Polykuben, die er 1939 gefunden hat, ergibt einen Würfel aus 27 Einzelwürfeln. Piet Heins Erfindung kann im Mathematikunterricht als Ausgangspunkt für neue Erfindungen genutzt werden. Das Ziel heisst: Jedes Kind erfindet seinen eigenen Somawürfel.

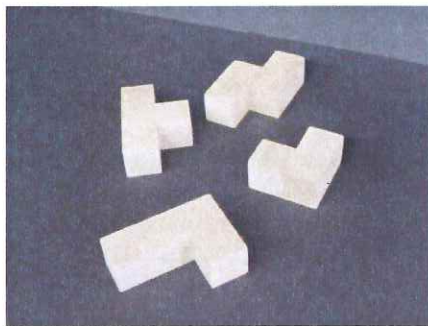


Abbildung 6: Die vier 'einstöckigen' Teile beim Somawürfel von P. Hein.

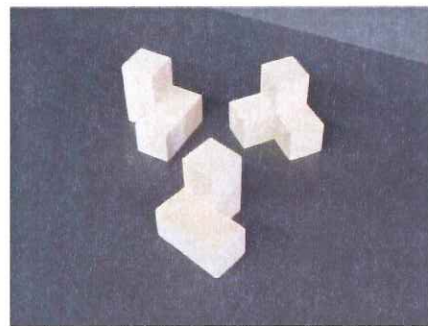


Abbildung 7: Die drei 'mehrstöckigen' Teile beim Somawürfel von P. Hein.

Thema X

Es hat sich bewährt, Kinder anzuhalten, anfangs Kriterien für ihre zukünftige Erfindung zu definieren. Diese sollen von Piet Heins Somawürfel abweichen. Dadurch kann das Kopieren vermieden werden. Zudem ermöglichen die festgelegten Kriterien gezieltes Erfinden. Übernommen wird von Piet Heins Würfel nur, dass alle Teile in der Form verschieden sein müssen. Mögliche Kriterien könnten sein:

- **Anzahl Teile:** 4, 5 oder 6 Teile
- **Form der Teile:** nur „einstöckige“ Teile (ebene, planare Polykuben) oder nur „mehrstöckige“ Teile (räumliche, stereometrische Polykuben)
- **Grösse der Teile:** $27\text{Würfel} = 3 \times 5W + 3 \times 4W$ oder $27\text{Würfel} = 2W + 3W + 4W + 5W + 6W + 7W$
- **Anzahl Lösungen:** Der Würfel kann auf mindestens zwei verschiedene Arten zusammengesetzt werden oder der Würfel kann nur auf zwei verschiedene Arten zusammengesetzt werden.

Die Kriterien können kombiniert werden, z.B. einen Somawürfel erfinden mit vier (Anzahl) mehrstöckigen (Form) Teilen. Die angegebenen Kriterien sollen zum Weiterdenken anregen, es ist keine vollständige Liste.

Die Kinder bauen zuerst ein Modell. Sie setzen die Einzelwürfel (Abbildung 8) mit Abdeckband zu Polykuben (Abbildung 9) zusammen. Stellt sich ein Irrtum ein, kann der Körper leicht zerlegt und neu zusammengesetzt werden.



Abbildung 8: Ausgangspunkt: 27 Würfel

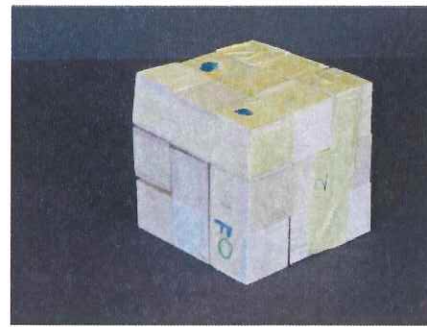


Abbildung 9: Modell Somawürfel von...

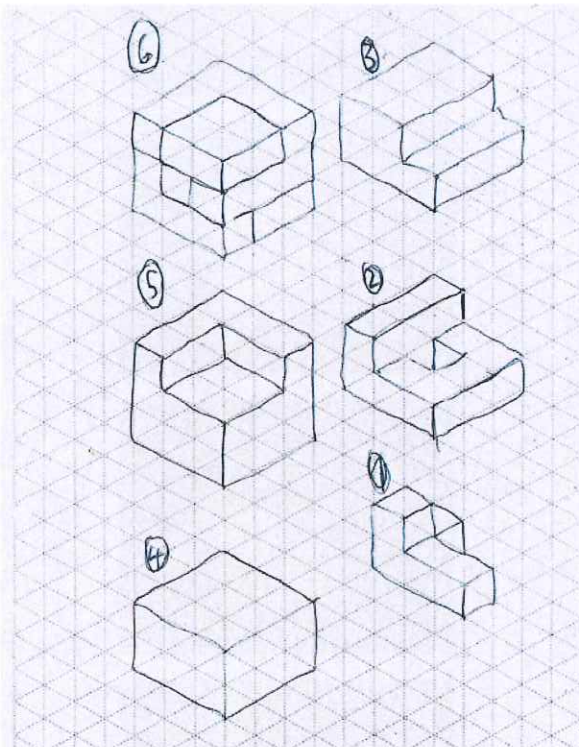
Tabelle 7: Materialliste für das Modell (Masse in mm).

Nr.	Bestandteil	Anzahl	Länge	Breite	Dicke	Bemerkungen
1	Würfel	27	25	25	25	Kiste 1
1 Rolle Abdeckband						
Kopiervorlage 1 (K1)						

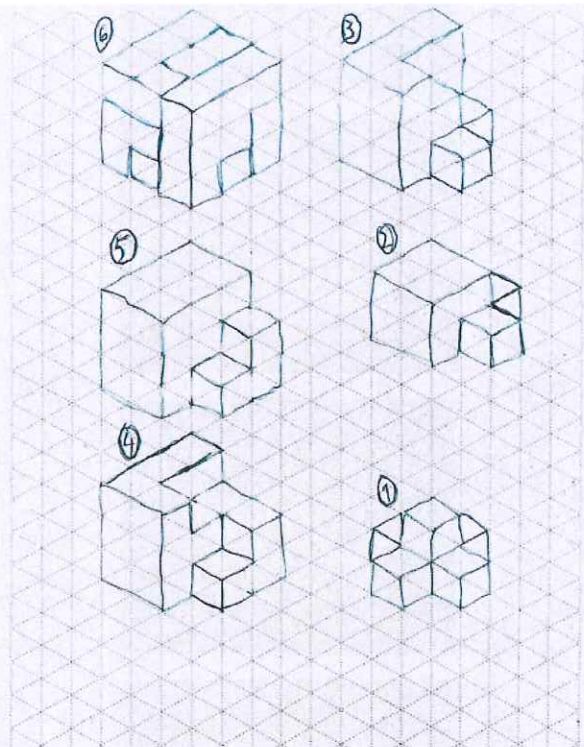
Praxisbeispiel

Dass eine Erfindung ungeahnte Wege nehmen kann, zeigt das Beispiel von David, 13-jährig (Name geändert). Er arbeitete während seines Klinikaufenthaltes immer wieder bei mir in der Werkstatt und weitete seine Somaerfindung zum Projekt aus. Er entwickelte zuerst einen Somawürfel aus verschiedenen einstöckigen Teilen, dann ein zweites Puzzle aus unterschiedlichen mehrstöckigen Teilen. Anschliessend stellte er sich die Frage, ob aus all seinen Bauteilen auch ein Somawürfel gebaut werden kann, der gemischt aus einstöckigen und mehrstöckigen Teilen zusammengesetzt wäre. Davids Zeichnungen (Zeichnung 1 & Zeichnung 2) zeigen, dass er eine Lösung gefunden hat: zwei gemischte Würfel aus allen Teilen. Später stellte er die einstöckigen Teile in Rotbuche, die mehrstöckigen in Fichte her (Fotoreihe 1 & 2). Sein Würfelspiel ergänzte er mit einem fünfteiligen Faltprospekt, einer Art Gebrauchsanweisung, die er mit dem Computer gezeichnet hatte (Zeichnungen 3 & 4).

Verschiedene Bauteile regen zum Kombinieren an. Wie greifen sie ineinander? Welche Körper können damit gebaut werden? David fand beim Spielen heraus, dass er mit seinen Teilen einen Quader bauen kann (Zeichnung 5).

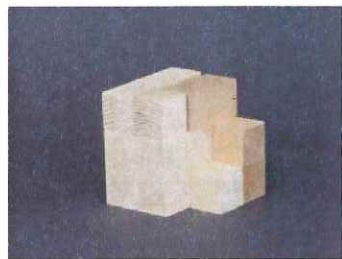
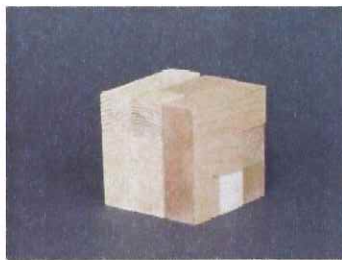


Zeichnung 1

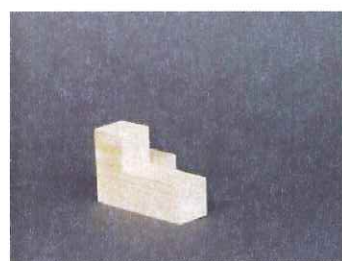
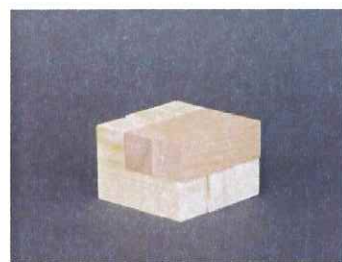
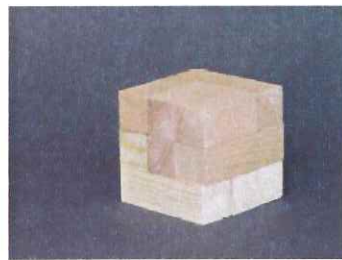


Zeichnung 2

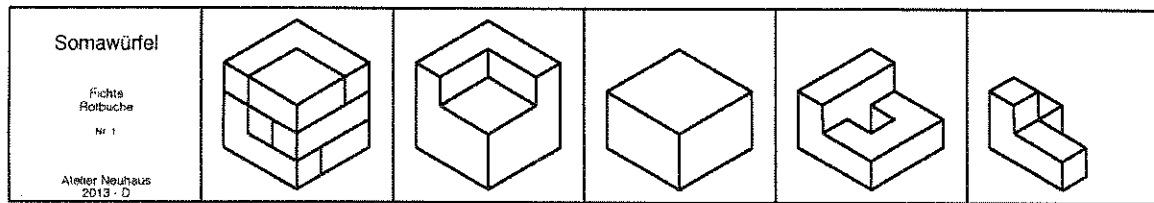
Fotoreihe 1



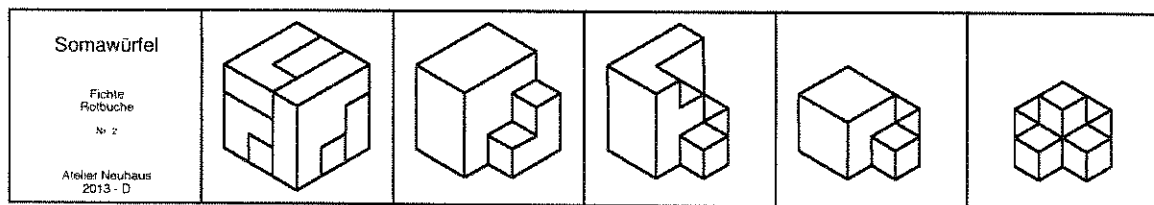
Fotoreihe 2



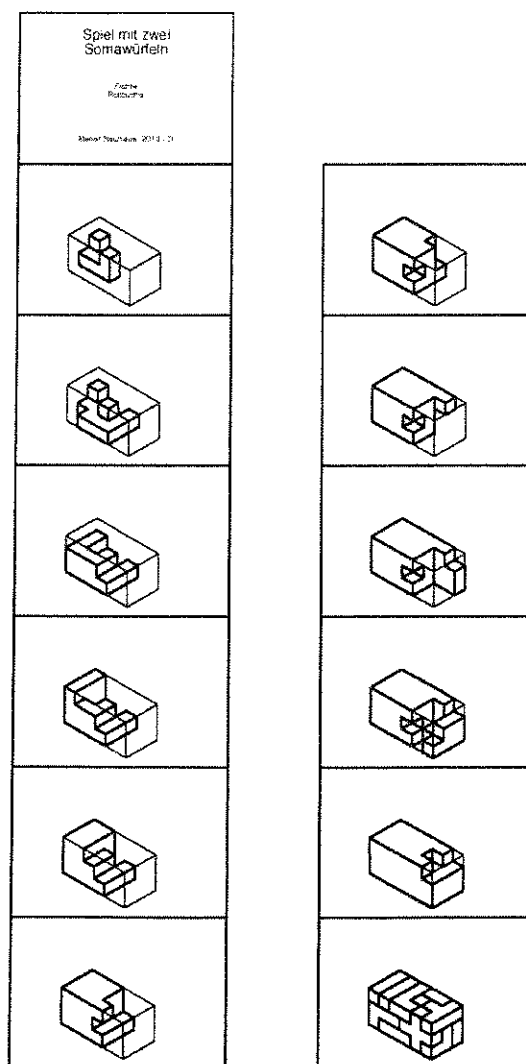
Zeichnung 3



Zeichnung 4



Zeichnung 5



Modelle und Zeichnungen halten das Gefundene fest, können aber über den geheimnisvollen Prozess zur Lösungsfindung wenig aussagen. Darum achte ich auf günstige Augenblicke und schaue dem Werden einer Erfindung mit höchster Aufmerksamkeit zu. – Aus Distanz, denn ich will das Kind nicht stören. Da wird Würfel an Würfel gefügt, der neue Somateil gedreht, betrachtet, mit den andern verglichen, begutachtet, plötzlich das Abdeckband entschieden weggerissen und von Neuem begonnen. Gelegentlich sprechen Kinder leise dazu. Und bei mir als Betrachter verstärkt sich der Eindruck: Jetzt lassen sich Denken und Handeln nicht mehr trennen. Damit die gelungene Erfindung nicht vergessen geht, muss sie dokumentiert werden. Wie das Beispiel von David zeigt, kann das Zerlegen des Würfels als Bilderfolge dargestellt werden. Ein Rasterpapier (Kopiervorlage K1) erleichtert das Zeichnen in isometrischer Darstellung enorm. Gelingt die Umsetzung auf einem Plan noch nicht, kann das Zerlegen des Puzzles mit der Digitalkamera festgehalten werden.

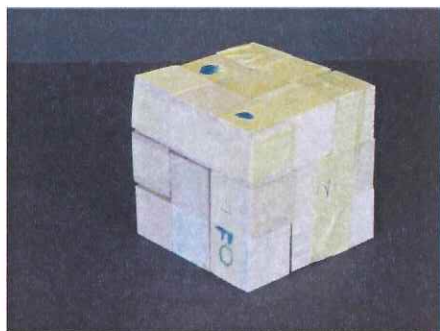


Abbildung 10: Modell

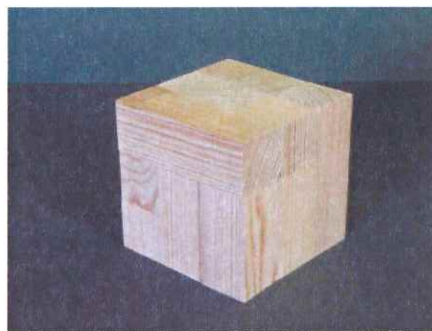


Abbildung 11: Somawürfel aus Lärche

Nach dem Modell kann der Somawürfel in einer schönen Holzart produziert werden (Abbildung 11). Dies entspricht der Arbeitsweise eines Handwerkers und in der Schule würdigt es auch das Schaffen der Erfinderin und des Erfinders.

In einem nächsten Arbeitsschritt erstellt das Kind die Materialliste um das Holz bestellen zu können. Vorgängig muss die Konstruktion geklärt sein. Wurden im Modell drei Würfel zu einem Quader zusammengesetzt, wird bei der Produktion dieser Quader als Ganzes von einem Holzstab mit entsprechendem Querschnitt abgesägt. So betrachtet werden jetzt die Teile nicht mehr aus Einzelwürfeln zusammengeleimt, sondern direkt Quader mit der Länge von 2 Würfeln und Quader mit der Länge von 3 Würfeln zu gesägt. Achtet man beim Verleimen darauf, dass Längsholz nur an Längsholz gesetzt wird, entsteht eine stabile Verbindung.

In jüngster Zeit begegnete ich Kindern, die in den ersten Schuljahren unter anderem auch den Zugang zum mathematischen Lernen nicht gefunden haben. Sie reagierten mit Vermeiden, Verweigern oder zeitweise mit Gewalt. Bleibt ihnen dadurch der Zugang zur Mathematik als Wissenschaft der Muster endgültig verschlossen? Dass Zahlen, Symbole und Fachbegriffe diese Kinder weiter verwirren und schlussendlich zum Schulausschluss beitragen können, ist

verständlich. Wäre es nicht sogar sinnvoll, für kurze Zeit das Rechnen zu unterlassen? Könnte nicht Handeln aus der Sackgasse führen? Sollte nicht die Hand aktiviert werden? Die Hand, die den Säugling als Erstes das Ich erahnen lässt? Der Hand ist am Anfang die ‚Geometrie des Raumes‘ näher als die Welt der Zahlen oder die Geometrie der Ebene. Deshalb reagiere ich als Lehrer bei sich wiederholenden Schwierigkeiten im Arithmetikunterricht mit anspruchsvollen, lösbaren Aufgaben zur Geometrie des Raums und nicht mit anderen Rechenmethoden. Wenn diese Aufgaben im Grenzbereich von Spiel und Mathematik gestellt werden können, machen Kinder möglicherweise noch besser mit.

Ich musste aber einsehen, dass die oben beschriebene Methode, mit Würfeln und Abdeckband einen eigenen Somawürfel zu erfinden, für ‚Mathematikverweigerer‘ eine Überforderung sein kann. Mit den 27 Würfelchen und der Rolle Abdeckband konnten nicht alle tätig werden und eine eigene Erfindung wagen. Selbstständiges Tun wollte nicht gelingen. Ängstigt sie schon der Gedanke, das Unterfangen könnte scheitern, mit vier Würfeln ein grosses L zusammenzusetzen? Oder trauen sie sich nach dem Misslingen keinen weiteren Versuch mehr zu? Ich ändere in solchen Situationen die Methode und stelle zuerst eine Auswahl Polykuben aus unterschiedlichen Holzarten her. Das Volumen aller Polykuben entspricht 63 Einzelwürfeln. Als Ausgangspunkt zum Erfinden eines Somawürfels hat das Kind nicht mehr Einzelwürfel vor sich auf dem Tisch, sondern eine Auswahl ungleicher Polykuben (Abbildung 12).



Abbildung 12: Ausgangspunkt sind unterschiedliche Polykuben

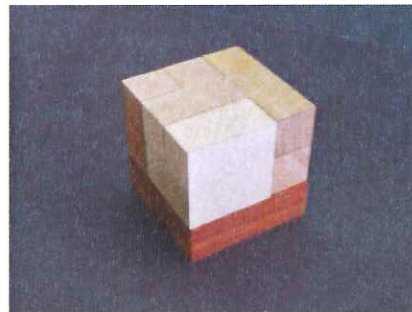


Abbildung 13: gebauter Somawürfel

Mit diesen Polykuben lassen sich, abhängig von der Wahl der Formen, unterschiedlichste Somawürfel bauen (Abbildung 13). Nach ersten Beobachtungen vermute ich, dass mit Polykuben als Ausgangspunkt die Hürde zum Bauen eines Somawürfels kleiner ist als wenn das Kind aus Einzelwürfeln Polykuben entwickeln muss, die einen Somawürfel ergeben. Der Grund könnte darin liegen, dass das Bauen eines Somawürfels aus Polykuben eher als Spiel wahrgenommen wird.



Abbildung 14: Polykuben aus 63 Einzelwürfeln aus verschiedenen Holzarten

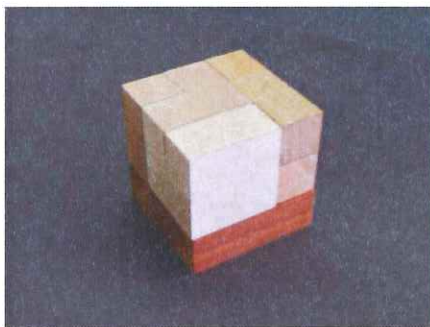


Abbildung 17: Somawürfel



Abbildung 15: 27 Einzelwürfel

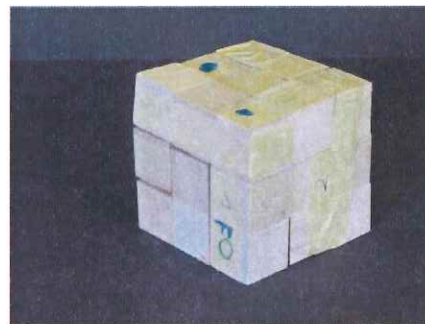


Abbildung 16: Polykuben kleben

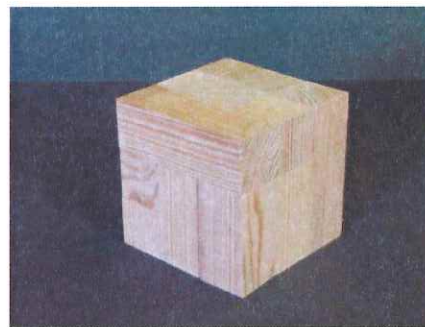


Abbildung 18: Somawürfel

„Warum scheuen Sie es auch so sehr, etwas zu wiederholen,
das schon vor Ihnen gesagt worden ist?
In Verbindung mit Ihren eigenen Gedanken erscheint das Alte
selbst doch immer von einer neuen Seite.“

Moses Mendelssohn (1729-1786) dt. Philosoph

entwickeln (Konventionen)

Masse

Die Quaderabmessungen von Kiste 1 orientieren sich am Kubikdezimeter. Dies wählte ich so, damit es leichter fällt, das Messen mit Raum- und Volumenmassen sichtbar und vergleichbar zu machen. Es kann beispielsweise gezeigt werden, dass im Würfel vom einem dm^3 Inhalt ein Liter Flüssigkeit Platz hat. Der Quadratdezimeter wird dabei zum Ausgangspunkt der Flächenmasse und der Dezimeter entsprechend für die Längenmasse.

Längen, Flächen und Körper

Mit den Bauklötzen von **baumit I** können Längen, Flächen und Körper untersucht, verglichen und beschrieben werden. Der Entwicklung der verwendeten Fachbegriffe und der mathematischen Symbole ist dabei besondere Beachtung zu schenken (Wollring, 2007, S.7/8).

Dichte

Zwei Kubikdezimeter-Würfel aus verschiedenen Holzarten bringen eine Waage nicht ins Gleichgewicht. Gleich gross, aber nicht gleich schwer - wie deuten Kinder diesen Umstand? Auch hier gilt, dass die ersten bewussten Auseinandersetzungen mit dem Phänomen nicht mit Fachbegriffen beschrieben werden sollten.

Ähnlichkeit

Die Grösse der Bauklötze ist so gewählt, dass es möglich ist, die Auswirkungen des Halbierens oder Verdoppelns der Seitenlänge bei Würfel und Quader auf die Oberfläche oder das Volumen erfahrbar zu machen. Es ist zudem möglich, mit Quadern Gegenbeispiele zur Ähnlichkeit darzustellen.

Kongruenz

Mit Hilfe der Körper von **baumit I** können verschiedene Flächen präzise auf Papier übertragen werden. Kinder stellen den Körper auf das Blatt Papier und zeichnen mit Bleistift entlang der Körperkanten. Beim Vergleichen der Flächen kann das Kind Eindrücke sammeln, was Kongruenz bedeutet.

Strategien

Beim Einpacken der Quader in die zwei Kisten oder beim Zusammensetzen eines Würfelpuzzles kann mehr oder weniger erfolgreich vorgegangen werden. Die gemachten Erfahrungen geben Anlass zum Austausch unter den Lernenden, um erfolgversprechende Strategien von andern unterscheiden zu lernen.

Kodierung

Es ist üblich, zur Beschreibung der Lage eines Körpers eine Kodierung zu Hilfe zu nehmen. Hier gilt Ähnliches wie beim Entwickeln der Fachbegriffe: Kinder brauchen unterschiedlich lange Zeit, um eine Kodierung zu verstehen und um sie auch erfolgreich anwenden zu können. Die Themen „Somawürfel von ...“ und „Packproblem von Conway“ eignen sich dazu, eine Kodierung einzuführen.

Dank

Mein besonderer Dank gilt den Kindern und Jugendlichen, die sich auf meine Experimente im Mathematikunterricht eingelassen haben. Mit ihren Reaktionen haben sie immer wieder darauf hingewiesen, dass der Invention beim Mathematiklernen besondere Bedeutung zukommt.

baumit I wäre wahrscheinlich auf der Strecke geblieben, hätte mich mein langjähriger Freund, Lorenz Luginbühl nicht immer wieder angehalten, daran weiter zu arbeiten. Als Pädiater und Entwicklungsneurologe hat er mich bei gemeinsamen Projekten in die Neurobiologie des Menschen eingeführt und stets darauf hingewiesen, wie sich Motorik und Denken gegenseitig beeinflussen.

Ich danke dem Mathematikdidaktiker Bernd Wollring, der im offenen Gedankenaustausch die Materialien gesichtet und Änderungen vorgeschlagen hat, damit **baumit I** im heutigen Mathematikunterricht hilfreich eingesetzt werden können.

Meine Entwürfe zu dieser Broschüre hat Maria Jakober mit grosser Sorgfalt durchgesehen. Dank ihren Verbesserungsvorschlägen zu Text und Darstellung hat die Broschüre an Verständlichkeit und Übersicht gewonnen.

Literatur

Berlekamp Elwyn R., Conway John H., Guy Richard K. (1985): Gewinnen – Strategien für mathematische Spiele. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft. Braunschweig. ISBN 3 528 08534 7.

Spitzer Manfred (2009): Lernen. Spektrum Akademischer Verlag. Heidelberg. ISBN 978 3 8274 1723 7.

Wilson Frank R. (2002): Die Hand – Geniestreich der Evolution. Rowohlt Taschenbuch Verlag. Reinbek bei Hamburg. ISBN 3 499 61338 7.

Wittmann, Erich Chr. (2002): Schauen und Bauen (Spiel). Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart. Verlagsbestellnr. 19975.

Wollring Bernd (2007): Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. <http://www.mathematik.uni-kassel.de/didaktik/HomePersonal/lilitakis/home/workshops/LernumgebungenWofSinusHessen07071.pdf> [Stand: 7. August 2013].

Quellen Zitate

Gowers: Gowers, T. (2011): Mathematik. Reclam Sachbuch. Stuttgart. ISBN 978-3-15-018706-7

Einstein: <http://www.zitate-online.de/literaturzitate/allgemein/19791/jedes-denken-wird-dadurch-gefoerdert-dass.html> [Stand: 7. August 2013]

Galilei: <http://www.bk-luebeck.eu/zitate-galilei.html> [Stand: 7. August 2013]

Feynman: zitiert nach Erhard Taverna: Unser Freund, das Genom: Das postgenomische Zeitalter ist eines der Synthese neuer Lebewesen. Craig Venter zitiert den amerikanischen Physiker und Nobelpreisträger Richard Feynman: „What I cannot build, I cannot understand“

Schweizerische Ärztezeitung, 2013; 94:11, Seite 444 (13.3.2013)

Mendelssohn: http://www.gutzitiert.de/zitat_autor_moses_mendelssohn_thema_fortschritt_zitat_7890.html [Stand: 7. August 2013]

Anhang

Materiallisten **baunit I**

Inhalt Kiste 1

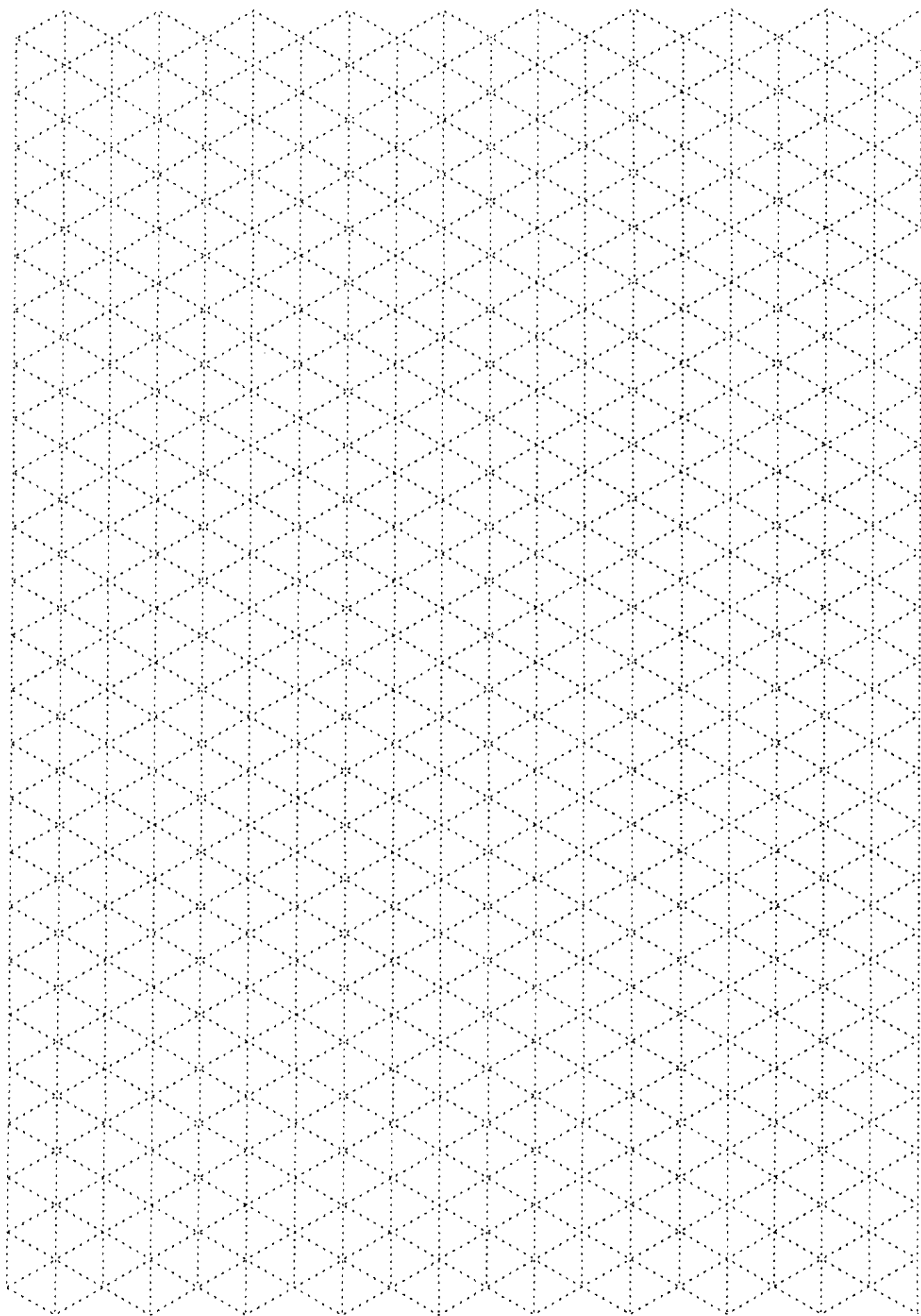
Nr.	Bestandteil	Anzahl	Länge	Breite	Dicke	Bemerkungen
1	Würfel	30	25	25	25	Feldahorn
2	Würfel	8	50	50	50	Feldahorn
3	Würfel	1	100	100	100	Weissbuch/Atlaszeder
4	Quader	10	50	25	25	Feldahorn
5	Quader	10	75	25	25	Feldahorn
6	Quader	6	50	50	25	Feldahorn
7	Quader	10	100	50	25	Feldahorn
8	Quader	6	75	50	50	Feldahorn
9	Quader	4	100	50	50	Feldahorn

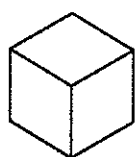
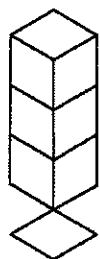
Inhalt Kiste 2

Nr.	Bestandteil	Anzahl	Länge	Breite	Dicke	Bemerkungen
1	Würfel	25	10	10	10	Nussbaum
2	Quader	22	100	10	10	Thuja
3	Quader	3	100	100	10	Thuja
4	Würfel	2	20	20	20	Thuja
5	Quader	3	100	100	10	Thuja
6	Quader	3	100	100	20	Thuja
7	Würfel	2	30	30	30	Thuja
8	Quader	3	100	30	30	Thuja
9	Quader	3	100	100	30	Thuja
10	Würfel	2	100	100	100	Thuja
11	Quader	6	50	50	25	Thuja oder Eibe
12	Quader	6	100	50	25	Thuja oder Eibe
13	Quader	6	75	50	50	Eibe, Kirschbaum, Fichte oder Atlaszeder
14	Quadratische Platten 100mm x 100mm aus Kunststoff und Karton					

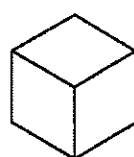
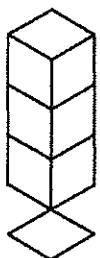
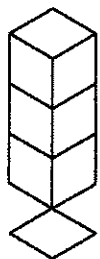
Kopiervorlagen

Kopiervorlagen K1 bis K4

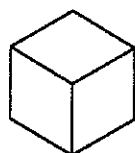




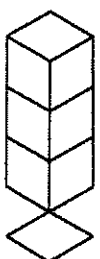
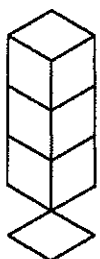
Nr.



Nr.

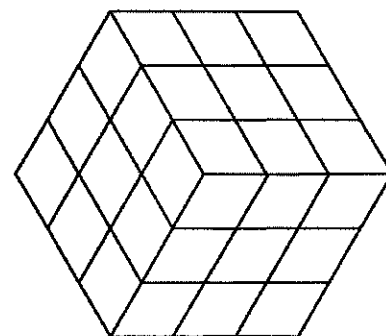
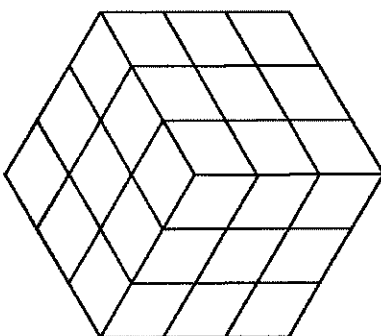
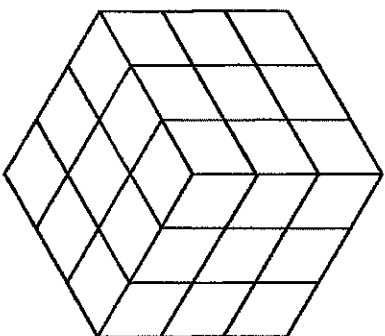
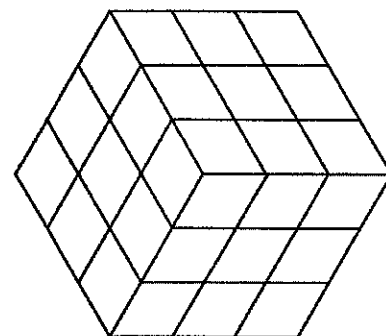
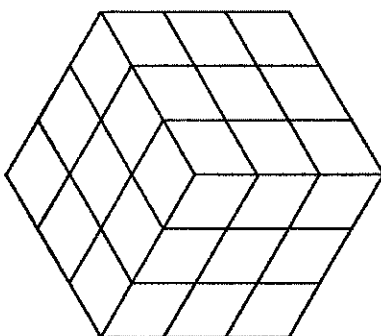
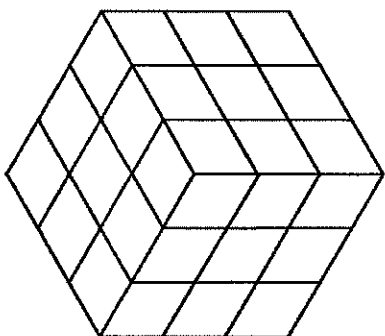
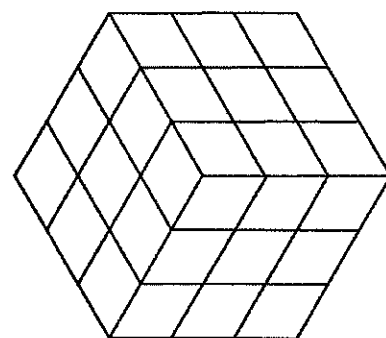
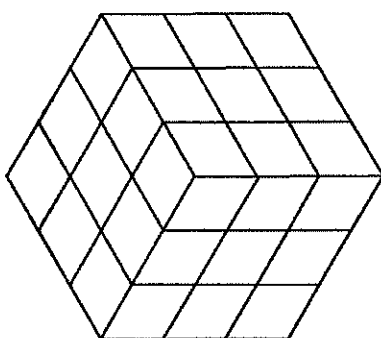
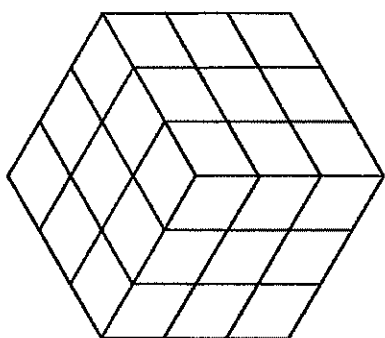
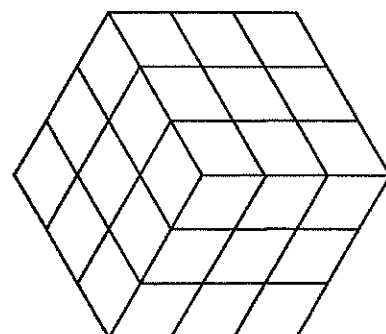
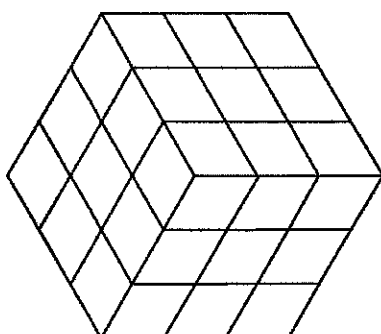
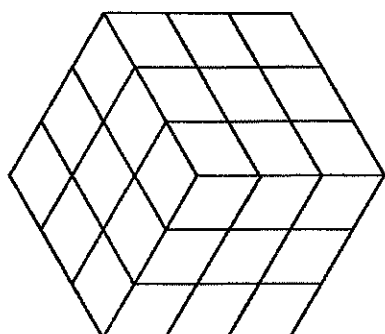


Nr.



Nr.





Vergrössern von A4 zu A3 mit ca. 185%

